

# Samuhik सामूहिक पहल Pahal

A Journal of Our Collective Action

February 2022 | Vol 2 Issue 06



Demystifying Mathematics

03

## Reflections & Opinions

गणित की शिक्षा और कक्षा  
शिक्षक बनाम सुगमकर्ता  
निदेश सोनी

### **Numeracy and Literacy**

Understanding and Reflecting Upon the Interconnectedness  
*Sudeshna Sinha*

**Accessible Math Resources for Schools from Vision Empower**  
*Vaishnavi Gupta, Devidatta Ghosh, Jyoti Bisht, Supriya Dey*

15

## Interview

प्राथमिक कक्षाओं में गणित शिक्षण की स्थिति  
समस्याएँ और समाधान  
रोहित धनकर से सामूहिक पहल की बातचीत

25

## Resources & Reviews

**How to Improve Math Performance for All Learners**  
Master Number Concept and Numbersense  
*Mahesh C. Sharma*

**Learning and Teaching of Algebra Through Tasks That  
Encourage Algebraic Thinking**  
*Aaloka Kanhere*

**Useful Math Resources**  
*Josephdeyone Jacobi*

38

## Ground Zero

**Demystifying Mathematics**  
Finding Joy in Numbers  
*Aastha Maggu*

## गणित की शिक्षा और कक्षा

### शिक्षक बनाम सुगमकर्ता

निदेश सोनी

मैं लगभग 21 सालों से बच्चों के साथ गणित विषय पर काम कर रहा हूँ। इनमें से शुरुआती 7 वर्षों में मैंने बच्चों के साथ गणित शिक्षण का कार्य उसी तरीके से किया जैसे आमतौर पर पारम्परिक कक्षाओं में होता है, अर्थात् यह माना जाता है कि शिक्षक का कार्य सिखाना है और बच्चों का कार्य सीखना है। इस दौरान मैं पारम्परिक स्कूल और कोचिंग का हिस्सा रहा और प्रचलित व पारम्परिक तरीकों की मदद से ही गणित शिक्षण पर काम करता रहा।

7 वर्षों तक इस प्रकार काम करने के बाद मैंने शिक्षा पर काम करने वाली गैर सरकारी संस्थाओं (NGOs) के साथ गणित पर काम करना शुरू किया और अब मैं पिछले 14 वर्षों से जिस तरह से बच्चों के साथ गणित शिक्षण में संलग्न हूँ उसमें सीखने और सिखाने की प्रक्रिया एकतरफा न होकर दोतरफा है, यानी मैं भी बच्चों से सीख रहा हूँ और बच्चे भी मुझसे सीख रहे हैं।

इन 14 वर्षों में एक बात जो मुझे बेहतर तरीके से समझ आई है, वह यह है कि एक सुगमकर्ता के तौर पर हमें 'सिखाना नहीं होता है, सीखना होता है।' वर्तमान युग में अध्यापक की भूमिका एक सुगमकर्ता के रूप में बदल गई है। सुगमकर्ता कक्षा-कक्ष में चर्चा, प्रश्नों व सहायक शिक्षण सामग्री की मदद से बच्चों को सीखने के ऐसे मौके उपलब्ध कराते हैं जिससे बच्चे खुद से व एक-दूसरे की मदद से अपना ज्ञान गढ़ सकें।

बच्चों के साथ गणित सीखने की इस यात्रा में और अपने सहकर्मियों के साथ चर्चा, बातचीत व काम के दौरान मैंने काफी कुछ सीखा और सीखने की यह प्रक्रिया अभी भी जारी है। मैंने जो कुछ भी सीखा या सीख रहा हूँ उसे अपने काम में शामिल करने का लगातार प्रयास कर रहा हूँ। मैं इस लेख में अपने सीखने के अनुभवों और उससे उपजे चिन्तन को इस आशा के साथ शामिल कर रहा हूँ कि शायद यह दूसरे साथियों के लिए मददगार साबित हो।

#### दस्तावेजों के प्रकाश में गणित शिक्षण

भारत की नई राष्ट्रीय शिक्षा नीति में यह स्पष्ट कर दिया गया है कि शिक्षा का उद्देश्य ऐसे अच्छे इन्सान तैयार करना है जो जिज्ञासु और तार्किक क्षमता से युक्त हों, जिनमें धैर्य और सहानुभूति के गुण हों, साहस और लचीलापन हो, वैज्ञानिक चेतना हो, रचनात्मक कल्पनाशक्ति और नैतिक मूल्य हों। ऐसे

नागरिक ही उस समाज का निर्माण करने में सक्षम होंगे जिसकी कल्पना भारत के संविधान द्वारा की गई है। इसी सन्दर्भ में यदि हम गणित शिक्षण के बारे में बात करें तो गणित शिक्षण का आधार पत्र (2005) कहता है कि विद्यालयों में गणित शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बच्चों की सोच का गणितीयकरण करना है, साथ ही प्रारम्भिक स्तर पर गणित-शिक्षा ऐसी होनी चाहिए जो बच्चों को आगे आने वाले जीवन की चुनौतियों का सामना करने के लिए तैयार करे।

### जीवन की वास्तविकता से जुड़े ऐसे उदाहरण और कक्षा-कक्ष में बच्चों को इनके साथ जूझने के लिए दिए गए पर्याप्त मौके और चर्चा उनके लिए चिन्तन के नए आयाम खोलते हैं।

गणित का यह आधार पत्र उन परिस्थितियों के बारे में भी बात करता है, जिसमें गणित सीखा जाना चाहिए। इसमें 6 बातों पर जोर दिया गया है : 1. बच्चे गणित में आनन्द लेना सीखें, 2. बच्चे महत्वपूर्ण गणित सीखें, 3. गणित बच्चों के जीवन-अनुभव का हिस्सा हो जिसके बारे में वे बात करें, 4. बच्चे अर्थपूर्ण समस्याएँ प्रस्तुत करें और उनके हल ढूँढ़ें, 5. बच्चे सम्बन्धों और संरचनाओं की सोच बनाने में अमूर्त विचारों का प्रयोग करें, और 6. बच्चे गणित की मूल संरचना को समझें तथा शिक्षकों से अपेक्षा है कि वे प्रत्येक बच्चे को कक्षा की प्रक्रियाओं के साथ जोड़कर रख सकें।

जब हम इन दोनों महत्वपूर्ण दस्तावेजों के प्रकाश में गणित की शिक्षा और गणित की कक्षा को देखते हैं तो कुछ अनुभव और विचार प्रासंगिक हो जाते हैं, जिन्हें अपने शिक्षण व शिक्षण योजना में शामिल करना मददगार साबित हो सकता है।

#### क्या हम अपने जीवन के गणित को पाठ्यपुस्तक के गणित से जोड़ सकते हैं?

मुझे लगता है कि हाँ ऐसा किया जा सकता है। एक आम इन्सान के जीवन में ऐसा बहुत कुछ होता है जिसे हम पाठ्यपुस्तक के गणित से जोड़ सकते हैं। आइए कुछ उदाहरणों की मदद से से इसे समझने की कोशिश करते हैं :

(1) कक्षा छठवीं में पढ़ने वाले एक बच्चे प्रवीण के पिता ने अपने खेती के काम के लिए साहूकार से 10 हजार रुपए का कर्ज लिया है। यह कर्ज उन्होंने 3 प्रतिशत मासिक की दर से लिया है। वह 100 रुपए पर 3 रुपए महीने यानी 1000 रुपए पर 30 रुपए और 10,000 रुपए पर 300 रुपए महीने का ब्याज साहूकार को देते हैं। 8 माह से कर्ज चल रहा है, अभी तक वह ब्याज के तौर पर 2400 रुपए दे चुके हैं। मूलधन अभी भी बाकी है। कई जगहों पर हर माह लिया जाने वाला यह ब्याज 5 से लेकर 10 प्रतिशत तक होता है। वास्तविक दुनिया का यह अकेला उदाहरण ही पाठ्यपुस्तक के गणित में शामिल साधारण ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज, मूलधन, लाभ, हानि, मासिक दर, वार्षिक दर, संख्याओं की मात्रात्मक समझ आदि कई अवधारणाओं पर बच्चों के साथ काम करने की अपार सम्भावनाएँ प्रस्तुत करता है।

बच्चों के साथ चर्चा करने के लिए इसमें कई प्रश्न निहित हैं, जैसे— कर्ज की जरूरत क्यों पड़ती है? साहूकार से ही कर्ज लेने की क्या जरूरत है? क्या बैंक से कर्ज नहीं लिया जा सकता है? बैंक से कर्ज लेने में क्या समस्या आती है? 3 प्रतिशत मासिक ब्याज का मतलब वार्षिक रूप से कितना होता है? वर्तमान में बैंक में ब्याज की दर कितनी है? बैंक व साहूकार से लिए समान कर्ज में दोनों स्थितियों में दिए जाने वाले ब्याज पर कितना अन्तर आएगा? क्या कर्ज के लिए कोई और भी तरीके हो सकते हैं, जैसे—स्व सहायता समूहों के द्वारा कर्ज लेना? इनमें ब्याज का प्रतिशत कितना है? साहूकार से गाँव में कितने लोग कर्ज लेते हैं? ब्याज से साहूकार की हर माह और पूरे साल में कितनी आय होती होगी?

(2) लगभग 200 घरों वाले एक छोटे से गाँव के ज्यादातर पालकों का कहना है कि उनके पास बच्चों की पढ़ाई-लिखाई के लिए पैसे नहीं हैं, यहाँ तक कि उनके लिए छोटी-मोटी जरूरतों जैसे—नोटबुक, पेंसिल आदि को पूरा करने के लिए भी पैसे नहीं रहते। गाँव के ज्यादातर पालक खेतिहर मजदूर हैं। जिनके पास जमीन है वह बहुत कम है, साथ ही पानी की भी दिक्कत है। इसी गाँव में कक्षा 4 से लेकर 8 तक के बच्चों ने कुछ जानकारियाँ एकत्र कीं।

जैसे— एक गिलास शराब की कीमत 15 रुपए है। एक जगह से हर रोज लगभग 30 गिलास शराब बेच दी जाती है, मतलब लगभग 450 रुपए की शराब बिक जाती है। गाँव में ऐसी 8 जगहें हैं जहाँ से शराब बेची जाती है, यानी हर दिन लगभग 3600 रुपए की बिक्री होती है। कई जगहों पर बिक्री ज्यादा भी होती है इसलिए पूरे माह में शराब की बिक्री को 4000 रुपए माना गया। इस तरह से अन्दाजा लगाया गया कि पूरे साल में लगभग 48000 रुपए की शराब बिक जाती है।

इस पूरी प्रक्रिया के दौरान बच्चों ने बहुत सी बातों पर चिन्तन और मनन किया और उनकी ओर से कई सवाल सामने आए—

शराब में हर दिन बहुत सारा पैसा जा रहा है, अगर इस पैसे को बचा लिया जाए तो यह परिवार के काम आएगा। अगर हमारे छोटे से गाँव में इतना पैसा शराब पर खर्च हो रहा तो पूरे विकासखण्ड के 165 गाँवों का मिलाने पर तो यह राशि और भी ज्यादा होगी। बच्चों द्वारा किया गया यह विश्लेषण कई सारे सवाल खड़ा करता है, इस विश्लेषण से उन्हें अपने आस-पास के ताने-बाने को समझने में मदद मिलती है। अब वे बड़ी संख्याओं के साथ केवल पढ़ाई नहीं कर रहे होते हैं बल्कि उन संख्याओं की मात्रात्मक समझ को समझने का प्रयास करते हैं, अपने जीवन में इन संख्याओं के महत्व को महसूस करते हैं क्योंकि अब संख्याएँ उनके लिए केवल संख्याएँ नहीं रहीं बल्कि उनके जीवन का हिस्सा हैं।

## एक आम इन्सान के जीवन में ऐसा बहुत कुछ होता है जिसे हम पाठ्यपुस्तक के गणित से जोड़ सकते हैं।

(3) कुछ दिनों से कक्षा में प्रतिशत पर बात चल रही थी। एक दिन रवीना चिप्स का एक खाली पैकेट लेकर आ गई जिसकी कीमत 20 रुपए थी और उस पर 20 प्रतिशत एक्स्ट्रा लिखा हुआ था। उसने मुझसे कहा कि भैया इस पर 20 प्रतिशत एक्स्ट्रा लिखा है लेकिन चिप्स तो केवल 10 ग्राम ही ज्यादा दे रहे हैं। हमने पैकेट को बच्चों के बीच रख दिया और सभी बच्चों से रवीना के दावे पर चर्चा करने के लिए कहा।

बच्चों ने पैकेट को अलट-पलट करके देखा, आपस में बात की, हिसाब लगाया और बोले कि रवीना सही कह रही है। राहुल और रवीना ने मिलकर पूरी कक्षा को बताया कि चिप्स का यह पैकेट 50 ग्राम वजन का आता है, कम्पनी इस पर 20 प्रतिशत ज्यादा चिप्स यानी 50 ग्राम का 20 प्रतिशत अर्थात् 10 ग्राम ज्यादा दे रही है, इस तरह से यह पैकेट 60 ग्राम का हो गया है।

मैंने उनसे पूछा कि जब आप सब का हिसाब एक ही आ रहा तो इसमें समस्या कहाँ है? इस पर रवीना ने कहा कि पैकेट पर 20 प्रतिशत एक्स्ट्रा लिखा था जिसे पढ़कर ऐसा लगा कि चिप्स ज्यादा है पर वह तो 10 ग्राम ही ज्यादा थे। चिप्स बेचने का यह तरीका भ्रामक है या नहीं यह एक अलग मसला था परन्तु इस चर्चा ने बच्चों के बीच चर्चा के कई आयाम खोल दिए। इस चर्चा के बाद बच्चों ने कुछ दिन अलग-अलग चीजों पर मिलने वाली छूट के बारे में पता किया, कक्षा में बात की, अपने घरों पर बात की। कुछ दिन बाद बच्चे अपने साथ खाली पन्नियाँ, डिब्बे और पुराने अखबार की कटिंग लेकर भी आए और उन्होंने अपनी अपनी समझ को बाकी बच्चों के साथ साझा किया।

बच्चों का कहना था कि अलग अलग उत्पादों पर दी जाने वाली छूट को लेकर कम्पनियाँ जिस प्रकार की जानकारियाँ साझा

करती हैं वह होती तो सही हैं लेकिन भ्रामक हो सकती हैं। जब उनसे पूछा गया कि यह भ्रामक क्यों है इस पर बच्चों का कहना था कि इसे हमें समझना चाहिए, जैसे— चिप्स के पैकेट पर 20 प्रतिशत ज्यादा का मतलब सिर्फ 10 ग्राम ज्यादा चिप्स थे। 20 प्रतिशत सुनने में ज्यादा लगता है, पर सच में तो कम था। बच्चों ने इस बारे में कई सवाल पूछे, कई दिनों तक कक्षा में इस पर बहस और चर्चा होती रही।

इस चर्चा में हमने कई सवालों पर सोच-विचार किया। जैसे— हम प्रतिशत की जो अवधारणा कक्षा में सीखते हैं उसकी हमारे जीवन में कितनी प्रासंगिकता है? विज्ञापनों में कही जाने वाली बातों और दावों में कितना सच होता है और कितना भ्रम होता है? अगर यह कहा जाए कि अमुक उत्पाद 50 प्रतिशत भारतीयों की पहली पसन्द है, तो इसका क्या मतलब है? यदि भारतीयों की आबादी को हम 140 करोड़ मान लें तो क्या 70 करोड़ लोग इस उत्पाद का उपयोग करते हैं? विज्ञापनों में जो दावा किया जाता है, उस पर छोटा सा स्टार क्यों बनाया जाता है और उसके नीचे शर्तें लागू क्यों लिखा होता है? क्या ये विज्ञापन किसी खास समूह के लिए बनाए जाते हैं और इसके बारे में दावे खास स्थितियों के सन्दर्भ में किए जाते हैं?

ऐसा हो सकता है कि उपरोक्त में से कई उदाहरण हर बच्चे/बच्ची के लिए प्रासंगिक न हों परन्तु एक सुगमकर्ता इस तरह के उदाहरणों या चर्चा के बिन्दुओं को बच्चों के परिवेश से तलाश सकता है। जीवन की वास्तविकता से जुड़े ऐसे उदाहरण और कक्षा-कक्ष में बच्चों को इनके साथ जूझने के लिए दिए गए पर्याप्त मौके और चर्चा उनके लिए चिन्तन के नए आयाम खोलते हैं।

इससे उन्हें पाठ्यपुस्तक के गणित को अपने जीवन में लागू करने का अवसर मिलता है जिससे उनमें यह समझ विकसित होती है कि सवाल और संख्याएँ महज किताबी बातें नहीं बल्कि उनके रोजमर्रा के जीवन का हिस्सा हैं। वे गणनाओं और समस्याओं को केवल कक्षा-कक्ष की एक अनिवार्य प्रक्रिया मानने की जगह उनमें निहित अर्थ को समझ पाते हैं, जो उनकी व्यावहारिक व सामाजिक समझ को और पुख्ता करता है। इस प्रकार हमारे दस्तावेजों में लिखा यह वाक्य कि गणित का उपयोग अपने दैनिक जीवन में आने वाली समस्याओं को हल करने में किया जाए, जमीन पर अमल होता हुआ दिखता है।

एक सुगमकर्ता के लिए ऊपर दी गई गतिविधियों को कक्षा-कक्ष, पाठ्यक्रम व समय-सीमा के बन्धनों के साथ करना आसान नहीं होता। इसके साथ ही कई लोग यह भी मानते हैं कि इन प्रक्रियाओं के साथ गणित शिक्षण को गणित नहीं माना जाता है, उन्हें यह भी लगता है कि इस प्रक्रिया से गणित शिक्षण करने से पाठ्यपुस्तक का औपचारिक गणित पूरा नहीं होगा और कक्षा-कक्ष में पाठ्यक्रम और सीखने की गति धीमी हो जाएगी।

परन्तु वास्तविकता में कक्षा-कक्ष में दिए गए सीखने-सिखाने के इस प्रकार के मौके कक्षा के माहौल को समृद्ध बनाते हैं। इन विविध अवसरों के साथ बच्चे अपनी गति से सीखते हैं, वे समस्याओं को हल करने के अपने तरीके विकसित करते हैं, अनुमान लगाते हैं, अपने तरीकों का इस्तेमाल करते हैं, इन तरीकों का विश्लेषण करते हैं, लगातार अपनी समझ में इजाफा करते हैं और अपने आस-पास की दुनिया को गणितीय नजरिए से देखने व समझने का प्रयास करते हैं।

यह सम्भव है कि सीखने-सिखाने के ऐसे प्रयासों से शुरुआती दौर में कक्षा-कक्ष की गति कुछ धीमी हो जाए, परन्तु एक बार इस प्रक्रिया की स्थापना हो जाने के बाद यह तय है कि बच्चे विविध गणितीय अवधारणाओं को तेजी से सीखेंगे। बहुत से सुगमकर्ता गणित शिक्षण के इन तरीकों का अपनी कक्षा में प्रयोग करते हैं और इन कक्षाओं में बच्चे गणित के साथ ज्यादा सहज नजर आते हैं।

**नोट:** इस लेख में उपयोग किए उदाहरणों व चर्चाओं को एकलव्य के एक कार्यक्रम 'शिक्षा की उड़ान' द्वारा पिछले लगभग 3 वर्षों से संचालित मोहल्ला लर्निंग एक्टिविटी सेंटर (MLAC) से लिया गया है। बैतूल जिले के शाहपुर विकासखण्ड व भोपाल जिले के बैरसिया विकासखण्ड में इस तरह के 50 केन्द्रों को संचालित किया जा रहा है, जहाँ पर बच्चे शाला समय के पहले/बाद में आकर स्थानीय सुगमकर्ता के साथ सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में शामिल होते हैं। इस कार्यक्रम को इंडिगो सीएसआर— इंडिगो रीच के द्वारा वित्तीय सहायता प्रदान की जाती है।

**निदेश सोनी** पिछले 14 वर्षों से एकलव्य संस्था के शाहपुर (बैतूल) केन्द्र में कार्यरत हैं। बच्चों के साथ गणित सीखने-सिखाने में खासा रुचि रखते हैं।

**Email Address:** nideshsoni@gmail.com



# Numeracy and Literacy

## Understanding and Reflecting Upon the Interconnectedness

*Sudeshna Sinha*

**M**y journey as a teacher has been spent in building learning spaces, creating appropriate learning approaches, and trying to find solutions to learning problems for teachers and students aged 7 to 15 years old. Theirs have been backgrounds of challenges - of special needs, of everyday struggles with social and emotional discrimination, and varied layers of economic distress.

Scattered throughout the cities and villages, these students and teachers have been from different learning spaces, mainly including government schools and orphanages, private schools, NGO-operated support centers, railway platforms, informal settlements around brick kilns, and remote tribal clusters.

At Shikshamitra, our engagement as an organization in the area of elementary education has exclusively been channelized in providing foundational literacy and numeracy for these children, and sharing pedagogic knowledge with their teachers and guardians.

### Reading provides both context and motivation for students of mathematics...

Basic Literacy enables learners to read and write in order to comprehend, express and justify their own thoughts and opinions, and to make an effort to empathize with and appreciate others better. Basic Numeracy nurtures the ability to understand the number concepts, to use numbers appropriately in all four operations, solve

problems, look at patterns, and to estimate, analyze and interpret data. It is however, needless to mention that it is language first and foremost that is predominantly the means by which a learner ultimately comprehends and communicates – to grasp these numerical skills.

### Getting Ready for Literacy and Numeracy: Pre-skills

An array of skills together referred to as 'readiness' or 'pre-skills' pave the way toward literacy and numeracy. Activities with different objects and pictures in matching, sorting, picking the odd-one-out, comparing and grading, completing patterns, listening, recalling, narrating, scribbling, painting, and speaking are the prerequisites that prepare learners for future skills in numeracy and literacy. It is interesting to note that all these readiness skills work in unison, through interdependence and complimenting with each other while laying the foundation.

For example, as a learner identifies with Goldilocks in the house of three bears, it is the little bear's chair, food, and bed that quell the fear and offer comfort and safety equally to Goldilocks and the learner. Simultaneously, the learner warms up to the concepts of size, amounts and gradation within that same story.

Early literacy and numeracy skills are taught and learnt together. It is later in the primary school years, however, when we start separating language and mathematics into two different entities, that the conflict surfaces and deepens.

### The Reality: Numeracy Becomes a Check for Literacy

We have often been witness to conflicts that can emerge out of math and language classes. It begins with students being unable to read and understand problems and word sums put before them in math class. Questions are then raised as to how the students were allowed to advance into that class with such poor literacy skills! Neither can they read with proper comprehension nor do they understand instructions, oral or written.

**It is the interconnected learning that matters finally. Proficiency in literacy and numeracy prospers through the process of interconnection – as do all the other school subjects.**

Moreover, most of the students do not write well. The language teachers down the line are inevitably put on the mat. The math teachers choose not to do anything about the desired language skills among their students. Language indeed is the prime vehicle of communication. It is indispensable for achieving sound numeracy and further learning of any other subject.

An immediate arrangement for a reading-writing program is the need of the moment. It should be offered by any teacher, including the math teacher! The onus is on primary teachers to facilitate the learning of basic literacy and numeracy for all students. All teachers must be thus equipped.

### Attaining Literacy and Numeracy

Reading is not just letters and words, it is more than that. Words are learnt in contexts. Specific contexts like market, food, forest – or even a story – provide an

array of words uniquely specific to it. New words, put together in meaningful sentences and paragraphs, are learnt in association, retained, and then internalized. These are further used in different situations and become reinforced through usage.

Math is no exception. It is not just numbers; it is more than that. The use of numbers, like words, is learnt in contexts such as ‘more,’ ‘less,’ ‘multiplying,’ and ‘distribution’. Each word denotes a different concept and a different process for manipulating numbers. The operations and words used in association with them are learnt in given contexts. The ‘math words’ or ‘terms’ are successfully added to the learner’s vocabulary. Math, in a sense, is just another language!

### Building Interconnections for Better Literacy and Numeracy

“Sums are nothing but little stories to be solved.”

I remember a teacher repeating this in the language classes. Sums can be narrated as stories, discussed, and computed together in the language class.

\*

Known words, learnt in the language class, can be used to build word sums to ensure better comprehension, computation, fewer spelling errors, and more confidence.

\*

Students can be given a free hand in creating their own sums using their vocabulary and experiences in order to add to the class pool of sums for practice.

\*

Common worksheets that highlight similar patterns of math and language exercises encourage logical thinking.

\*

Write a story in 3 lines using the given words: night/sky

\*

Make sums using the given numbers: 2, 3

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\*

Complete the following exercises:

\_\_\_\_\_  $8 \times 3$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ **24** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ lamp \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ **-amp** \_\_\_\_\_

\*

Combining numeracy and literacy skills can also be an interesting venture.

Use the numbers 3, 6, 9 to build a story.

\* \* \* \* \*

Are children able to read the terms and compute without having symbols provided?

Read the instructions and compute:

Divide:	Subtract:	Multiply:
32	32	32
4	4	4

\*

Students could be asked to write out the instructions for these sums:

- a.  $45 + 35$
- b.  $90 \div 15 - 6$

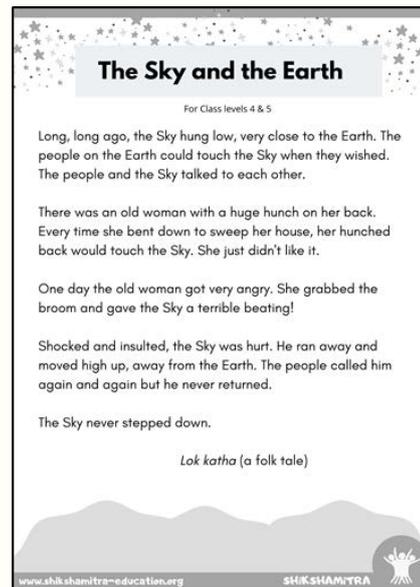
### Reading and Mathematical Literacy

Reading provides both context and motivation for students of mathematics (David Whitin, Heidi Mills, and Timothy O'Keefe). Different kinds of texts, including stories, serve as catalysts. The context of a story stimulates the learners (including the teachers) to think in new and diverse ways. As they feel encouraged to apply the different numerical skills that they already know, the

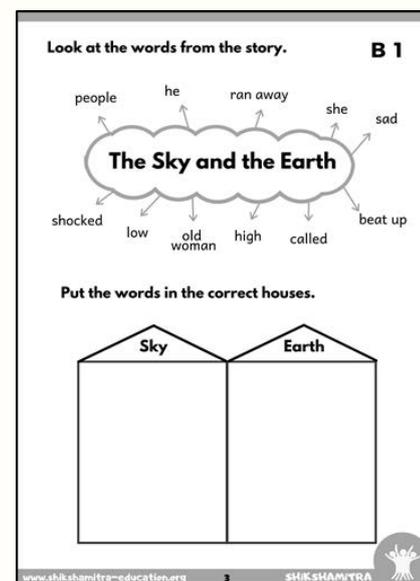
context might also initiate learning of a new mathematical skill!

Exploring further, students can spontaneously move into the realms of Environmental and Social Studies and also navigate the possibilities of the performing and visual arts.

To illustrate the influence of reading on mathematical skills, let us look at the story, **'The Sky and the Earth'** with the appropriate worksheets.



As students read and discuss **'The Sky and the Earth,'** they are to apply the skill of categorization in worksheet B1.



The next two worksheets help students to hone their skills in the sequencing of events (B2) and sharpen their ability to make comparisons by working on a Venn Diagram (C).

**Complete the story. B 2**

Long ago, the Sky and the Earth \_\_\_\_\_.

An old woman with a \_\_\_\_\_ back swept her house every day.

She did not like it when \_\_\_\_\_.

One day, the angry old woman \_\_\_\_\_ the Sky.

The Sky \_\_\_\_\_ from the Earth.

The Sky and the Earth \_\_\_\_\_.

**Make your own illustration for the story.**

www.shikshamitra-education.org SHIKSHAMITRA

**Earth Fractions**

There are six pictures of the Earth below. Your teacher will call out six different fractions. Listen and colour in each Earth picture correctly.

- 
- 
- 
- 
- 
- 

www.shikshamitra-education.org SHIKSHAMITRA

Teacher's note: 1/4, 3/4, 4/6, 1/3, 5/8, 4/4

It is the interconnected learning that matters finally. Proficiency in literacy and numeracy prospers through the process of interconnection – as do all the other school subjects.

**Fill-in the Venn Diagram**

A Venn Diagram helps you to compare two things, incidents, or people. Using a Venn Diagram you can write down the different characteristics of both in two similar circles. In a quick and compact manner, it helps us understand things and solve problems easily!

**Earth**  
- Has people  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Similarities**  
- blue colour  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Sky**  
- Has stars and planets  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

www.shikshamitra-education.org SHIKSHAMITRA

Next they are to solve simple numerical problems using the worksheets below.

**Love Our Earth**

78 ÷ 23  
36 ÷ 2  
6 × 7  
252 ÷ 6  
163 - 29 - 100  
96 - 54  
25 × 16  
3 × 6  
88 - 39  
Fifty five

42 = Green  
18 = brown  
26 = Yellow  
55 = red  
34 = Blue  
49 = Orange

A different kind of time table was drawn up with each learning session ranging between one-and-a-half to two hours, allowing us to cover languages, music, art and craft, various concepts in mathematics, EVS and social studies – under a single theme. All the students sat in a single room, using the library and computer spaces as and when required. This way, we economized a lot on time and space, and learnt to weave the subjects meaningfully. Much more learning was possible than what could be done in standard classes of 45 minutes each.

It was, however, mandatory that we teachers did our homework together. Each of us were going through and discussing all the subjects, then preparing self-study



unsplash.com/ Tamarcus Brown

materials and appropriate worksheets for every learning level (for both individuals and groups), including for those who had learning difficulties. The assessment of different learning outcomes was often based around one single story.

We tried this for six months, pleasantly surprised to find that we were actually all experiencing a boost in learning standards – of both students and teachers – in the ability to learn independently and to appreciate the value of interdependence (between subjects and humans) in a learning space.

We make the most of what we learn when we discover the connection between the different areas of learning and how they can be a part of our everyday life. This is why we need to be vigilant, always keeping in mind

that it is up to the learner to choose to learn and to make the final connections.

**Acknowledgement:** The author would like to acknowledge her colleagues Biswajit Chitrakar and Maura Hurley for their help and support in writing this article.

**Sudeshna Sinha** is the founder of Shikshamitra (2005), an education resource center for teachers in Kolkata, which formerly also ran a school. Over the years, she has been involved in teachers' training at the elementary level to primarily motivate, support and create good teachers. Designing methods and materials for effective teaching, especially languages, are her interest areas.

**Website:** [www.sikshamitra-education.org](http://www.sikshamitra-education.org)

**Email Address:** [shikshamitra.kolkata@gmail.com](mailto:shikshamitra.kolkata@gmail.com)

# Accessible Math Resources for Schools from Vision Empower

*Vaishnavi Gupta, Devidatta Ghosh, Jyoti Bisht, Supriya Dey*

**N**umeracy is a fundamental skill beginning with early childhood care and education. Subsequently in school, mathematics is a foundational subject for everyone. It is especially important for all those who wish to pursue higher education in the Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) related subjects. Children with visual impairment have largely been denied the opportunity to study mathematics beyond school education in India, since it is considered a ‘visual’ subject. In other words, the pedagogy of mathematics has been created by sighted persons and has used mostly visual representations such as diagrams, graphs and charts along with printed texts for explaining concepts, quite oblivious of the accessibility challenges of persons with print disability.

## Vision Empower

Vision Empower is a non-profit organisation with a mission to make STEM education accessible for children with visual impairment. For the team at Vision Empower, inclusion is the only mantra which pervades all our activities. A large part of our work involves making basic mathematical concepts comprehensible by school students with visual impairment. Towards this goal, we also design accessible materials to support those who teach students with visual impairment, and for those teachers who are themselves visually impaired and are teaching mathematics at schools.

## Primary School

Numeracy through Play: For students in grades 1 to 4, we have created a play-

based approach to develop foundational numeracy among children. Through Project VICT (Computational Thinking for the Visually Impaired), we have created a joyful pedagogic approach using the Ludic Design for Accessibility ([www.ludicdesign.org](http://www.ludicdesign.org)) approach to introduce numeracy concepts through accessible games.

**Children with visual impairment have largely been denied the opportunity to study mathematics beyond school education in India, since it is considered a ‘visual’ subject.**

These games are conducted by VE educational coordinators with children in small groups online or at school. We have identified 12 key learning areas for acquiring numeracy skills especially for persons with disabilities through a detailed review of literature. To cover these 12 areas, games were designed and play plans were created for caregivers. The play plans describe the session-wise steps to play the games at various difficulty levels [see Fig 1.A].

An example of a resource specifically created for this is the junior braille card pack. These cards are designed with tactile pictures of the respective suit and embossed with Braille digits. They are particularly suitable for children who are not Braille literate as well, since they have tactile dots equivalent to the number [see Fig 1.B].



Fig 1.A



Fig 1.B

During the pandemic, games were designed utilizing readily available materials at home. A well appreciated teaching aid used in games is the ten-frame. For this, an egg carton with ten spaces and pebbles such as marbles or even rajma seeds are used to play games such as sorting, patterns, and the odd and even game. The game application helps children to understand arithmetic concepts such as Systematic Counting, Relating Numbers to Quantity, Quantity Discrimination and Simple Arithmetic. Their learning can be ascertained through the learning indicators.

For example, for Simple Arithmetic, one of the key learning indicators for level 2 is “Understands division as another way of equal grouping /sharing /distribution.” For level 3, one of the key indicators is “Explores the multiplication facts of 2, 3, 4, 5 and 10 by

different ways like repeated addition, skip counting, identifying and continuing pattern.”

The entire list of games, learning areas covered and learning indicators are available on the VE website (Computational Thinking – the Ludic Design Approach : Vision Empower (visionempowertrust.in))

## Middle School

The VE school interventions include providing students with Braille Math books introducing Nemeth Code, the Braille characters for math symbols, as required by each chapter [see Fig 2.A]. These books contain accessible tactile diagrams and alternative texts for diagrams and pictures which are reviewed by special educators [see Fig 2.B].

Besides providing an accessible means for executing each activity and concept in the textbooks through detailed Teacher Instruction Kits (TIKs), we provide the necessary models or DIY videos (<http://visionempowertrust.in/tactile-diagrams/>) which teachers can use to create their own manipulatives for class.

During training programs, teachers are acquainted with the activities and methods mentioned in the TIKs. Following the principles of Universal Design for Education, all VE TIKs contain songs, rhymes, stories, hands-on activities and accessible games which use the multi-sensory approach of teaching. For example, to teach fractions, easily available materials such as egg cartons, small size balls are used. [see Fig 2.C]

The content created for students and teachers are made available in five languages so far on our accessible Learning Management System, Subodha [ see Fig 2.D]. The goal is to have teachers and schools across the country access the platform easily and find readily available accessible material for them to use in their own contexts. In order to ascertain the efficacy of the content and the methods being designed by the team, we



Fig 2.A

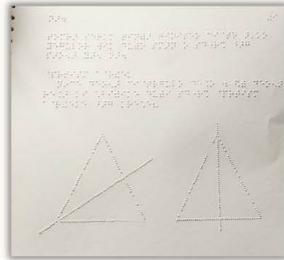


Fig 2.B

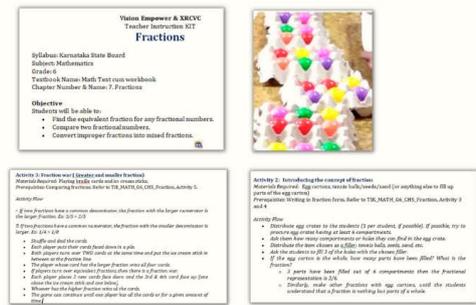


Fig 2.C



Fig 2.D

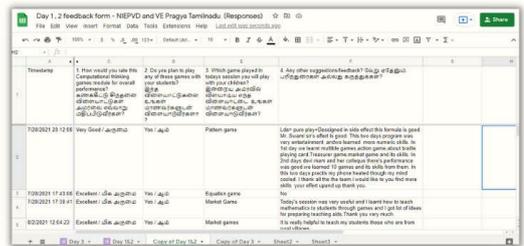


Fig 2.E

conduct sessions with children directly or with their teachers and gather their objective feedback [ see Fig 2.E].

Before publishing any content online, it is vetted by our own domain experts and accessibility experts with visual impairment. The VE team has barely been able to meet with students in person for eight weeks since March 2021, due to the COVID-19 pandemic. A large repository of content, especially for high schools, is therefore yet to be validated with the community.

### Is Geometry a Visual Topic?

A concept which students with visual impairment find difficult to appreciate without improvisation is that of geometry. For example, in order to measure the length of a line, students need to be provided with a tactile ruler [see Fig 3.A]. To make a tactile ruler, a regular scale is used. Tactile markings using fevicol are placed on the regular scale. Students are trained to place the ruler on the tactile lines and count the markings (dots) to measure the length.

Also, after evaluating various tactile geometry kits, we concluded on a combination of the lightweight kit from Worth Trust in

comparison to the metal kit with large and heavy tools from NIVH (National Institute for the Visually Handicapped) . However, we decided to use a regular compass and provided rubber sheets to help children draw using a stylus instead of a pencil and pins to secure the tools on the board.[ see Fig 3.B and Fig 3.C in the next page]

After much experimenting and observing teachers and children face-to-face, we recognized the need to first train the teachers in understanding geometry concepts and the methods of using the tools, for which we conduct Pragma Teacher Training sessions.

All the accessible resources created at VE for school students are aimed at empowering them by defying the age-old stereotype that math concepts are complicated and meant only for the sighted.

There is a long way to go in this journey of making maths completely accessible for children with visual impairment. As we continue our research and implement the findings, we look forward to a more inclusive and accessible future.

**Vaishnavi Gupta** is working as a Communications Executive at Vision



Fig 3.A

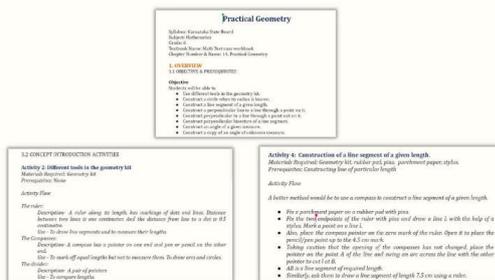


Fig 3.C



Fig 3.B

Empower. She is a journalism graduate from Lady Shri Ram College with a keen interest to use her skills in social enterprises.

**Jyoti Bisht** is an Educational Coordinator at Vision Empower with an interest in inclusive pedagogy. She has a master's degree in Education from Azim Premji University (APU).

**Devidatta Ghosh** is an Educational Coordinator with Vision Empower and is an

experienced science educator. She also holds a master's degree in Psychology.

**Supriya Dey** is a co-founder of Vision Empower.

**Website:** <http://visionempowertrust.in/>

**Email Address:** [vaishnavi@visionempowertrust.org](mailto:vaishnavi@visionempowertrust.org)

**Connect On:**   

# प्राथमिक कक्षाओं में गणित शिक्षण की स्थिति

## समस्याएँ और समाधान

रोहित धनकर से सामूहिक पहल की बातचीत

रोहित धनकर अजीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलुरु में प्रोफेसर तथा दिगंतर, जयपुर के मानद सचिव हैं।

**प्रश्न:** आप स्कूली स्तर पर गणित शिक्षण की वर्तमान स्थिति का आकलन कैसे करते हैं?

**उत्तर :** मैं प्राथमिक शिक्षा अर्थात कक्षा 1 से लेकर 8 तक की शिक्षा पर अधिक बात करूँगा। जहाँ तक मेरी समझ है, गणित शिक्षण की स्थिति अच्छी तो नहीं है। ऐसे विभिन्न प्रकार के सर्वेक्षण हुए हैं जो साफ तौर पर दर्शाते हैं कि शिक्षा क्रम में बच्चों से जो कुछ अपेक्षित है उसकी तुलना में वो बहुत कम सीख रहे हैं लेकिन मुझे लगता है कि स्थिति इससे ज्यादा खराब है क्योंकि वो जो कुछ भी सीख रहे हैं वह भी एक तरह से रटाई पर आधारित है। वे गणित को बिना समझे जो भी प्रक्रियाएँ (procedures) और एल्गोरिथम (algorithm - गणितीय समस्याएँ हल करने के लिए कुछ निर्धारित नियम) सीख रहे हैं उनके पीछे के औचित्य को या तार्किक आधार को बहुत कम सिखाया जाता है।

एक और बड़ी समस्या यह है कि ट्रिक्स पर और रट लेने पर ज्यादा जोर है। यह सच है कि बच्चे कुछ हद तक इन एल्गोरिथम और प्रक्रियाओं को लागू करना सीख लेते हैं लेकिन इससे उनमें न तो गणित आगे सीखने के लिए कोई उत्साह बन पाता है, न ही मानवीय चिन्तन का विकास हो पाता है और न ही जीवन में गणित के उचित प्रकार के उपयोग की क्षमता विकसित हो पाती है। यह आगे सीखने में भी बहुत काम में नहीं आ सकता, केवल परीक्षा पास करने में काम आता है।

अब यह स्थिति कितनी व्यापक है, कितने प्रतिशत बच्चों के साथ है इसके बारे में मैं बहुत ज्यादा नहीं कह पाऊँगा, लेकिन मेरी अध्यापकों से जो बातचीत होती है उसमें यह बात बहुत स्पष्ट है। तो इस दृष्टि से देखें तो गणित का शिक्षण बहुत कम हो रहा है, केवल कुछ प्रक्रियाएँ, कुछ एल्गोरिथम, कुछ ट्रिक्स वगैरह सिखाए जा रहे हैं वह भी शिक्षा क्रम में जितना अपेक्षित है उससे काफी कम है।

**प्रश्न :** अपने तीन दशकों के अनुभव के आधार पर बताइए कि क्या आपको लगता है कि उत्तर भारत और दक्षिण भारत में, प्राइवेट और सरकारी स्कूलों में या फिर अलग अलग प्रकार के बोर्ड में जैसे- राज्यों के बोर्ड, सीबीएसई बोर्ड, आईसीएसई बोर्ड

और आजकल तो अन्तरराष्ट्रीय बोर्ड भी आ गए हैं, प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण की स्थिति में कुछ विविधता है या फिर सभी जगह स्थिति खराब ही है?

**उत्तर :** मुझे लगता है विविधता होनी चाहिए। मेरे पास इसका कोई शोध नहीं है, मैंने बहुत ज्यादा इसका अध्ययन भी नहीं किया है लेकिन मुझे लगता है इसमें काफी विविधता है। सरकारी प्राथमिक स्कूलों में, प्राइवेट स्कूलों में और सरकार के भी एक से अधिक प्रकार के विद्यालय हैं, इनमें जिस तरह से गणित सिखाई जाती है उसमें विविधता तो है लेकिन अगर हम उन विद्यालयों की बात करें जो आम लोगों की पहुँच में हैं तो उनमें गणित को समझकर सीखने का रिवाज कम ही है।

कुछ विद्यालय हो सकते हैं जहाँ समझकर सीखने पर जोर हो। मैंने कुछ प्राइवेट स्कूलों के शिक्षकों से बातचीत की है, कई बार वो इस बारे में चिन्तित दिखाई देते हैं। लेकिन आगे हम इस बारे में बात करेंगे कि भले ही वो विषय के शिक्षण को लेकर चिन्तित हों लेकिन जो तरीके वो काम में लेते हैं वो और भी समस्याजनक हो सकते हैं इसलिए जरूरी नहीं है कि बहुत गम्भीर इच्छा के बावजूद गणित शिक्षण के प्रति उनकी दृष्टि सही हो।

**तो इस दृष्टि से देखें तो गणित का शिक्षण बहुत कम हो रहा है, केवल कुछ प्रक्रियाएँ, कुछ एल्गोरिथम, कुछ ट्रिक्स वगैरह सिखाए जा रहे हैं वह भी शिक्षा क्रम में जितना अपेक्षित है उससे काफी कम है।**

**प्रश्न :** तो इस सन्दर्भ में क्या आप हमें पिछले कुछ दशकों में दिगन्तर में किए गए अपने काम के बारे में बता सकते हैं? आपने कौन सी पद्धति इस्तेमाल की? और वहाँ आपका काम मुख्यधारा के स्कूलों में प्राथमिक स्तर पर होनेवाले गणित शिक्षण से कैसे अलग था? आपने अलग से काम करने का क्यों सोचा और इस काम को कैसे किया?

**उत्तर :** मैं आपके इस सवाल के एक हिस्से को, आपने जो सवाल मुझे लिखकर भेजे थे उसके एक सवाल से मिला देता हूँ उसमें आप यह पूछ रहे थे कि शिक्षाक्रम और शिक्षा नीति में जो सुझाव दिए गए हैं उनसे स्कूलों में, उनके तौर-तरीकों में

कुछ बदलाव होगा या नहीं। यदि हम इसको इस नजर से देखें कि शिक्षाक्रम और शिक्षा नीतियों में शिक्षा के प्रति और विषयों के प्रति एक दृष्टि की अभिव्यक्ति होती है व शिक्षण पद्धति और मूल सिद्धान्तों की तरफ कुछ इशारे होते हैं और उसके कारण बदलाव होते हैं।

## तो इस बात को ध्यान में रखते हुए हमें गणित के लिए कुछ ऐसा तरीका अपनाना पड़ा जिसमें अनुभव, भाषा, चिन्तन और समस्याओं का स्वयं समाधान इन चार बातों के आधार पर एक क्रमबद्ध तरीके से गणित की समझ विकसित हो।

तो मूल रूप से हम यह कह सकते हैं कि शिक्षा के बारे में और गणित के बारे में दिगन्तर की जो मान्यताएँ थीं और हैं बात वहाँ से निकल रही है और परिवर्तन की बात वहीं से आती है। इसका ठीक से जवाब देने के लिए मुझे बहुत सी अमूर्त बातें करनी पड़ेंगी और उसमें थोड़ा वक्त लगेगा तो मैं जल्दी-जल्दी कुछ मान्यताएँ आपके सामने रखता हूँ।

देखिए मानसिक विकास शिक्षा का प्रमुख मुद्दा होता है और मानसिक विकास एक जैविक और संश्लिष्ट प्रक्रिया होती है। यहाँ जिस अर्थ में मैं 'जैविक' का इस्तेमाल कर रहा हूँ उससे मेरा मतलब जीवित नहीं बल्कि मूलभूत है और जिस सन्दर्भ में मैं बात कर रहा हूँ वहाँ जैविक से मेरा तात्पर्य यह है कि मानसिक विकास ऊपर से चिपकाया नहीं जा सकता। यह भीतर विकसित होता है और यह बहुत सी चीजों का मिश्रण है, हम इसे खण्डों में नहीं बाँट सकते। इसका मूल एक तरफ तो अनुभव में होता है और दूसरी तरफ चिन्तन में होता है।

तो आप यह कह सकते हैं कि मानसिक विकास तब होता है जब अनुभव और चिन्तन दोनों मिलते हैं। तो एक मोटी सी बात हम यह मान लेते हैं। अब एक दूसरी बात यह है कि आप कांट से और कहीं सहमत हों या ना हों लेकिन उनका एक प्रसिद्ध वाक्य एकदम सही है। उन्होंने कहा है कि अनुभव अवधारणाओं के बिना अन्धा होता है और अवधारणाएँ अनुभवजनित बोध के बिना खाली अर्थात् अर्थहीन होती हैं। तो यदि यह बात सही है तो हमें आगे यह देखना पड़ेगा कि मानसिक विकास सीखने की प्रक्रिया का नतीजा होता है और सीखना पहले से उपलब्ध अनुभव और विचार से नए अनुभव और विचार को जोड़कर सार्थक बनाने का नाम है। मतलब हम किसी नई परिस्थिति का अर्थ अपने पुराने विचारों और अनुभव के आधार पर निकालते हैं और उसे पुराने अनुभव और विचार में समाहित करके सीखते हैं। इसमें एक बात और जोड़ लीजिए कि हम यह सारी बातें काफी सोच समझकर

मानकर चलते थे कि अवधारणाओं के बिना चिन्तन नहीं हो सकता है और अवधारणाएँ भाषा के बिना नहीं बन सकतीं। तो अब इन सारी बातों को एक साथ मिलाने पर आप पाएँगे कि इसके लिए फिर ये है जरूरी है कि एक तरफ तो अनुभव हो और दूसरी तरफ विश्लेषण हो और वह भाषा के माध्यम से ही हो सकता है।

तो पहली बात तो यह है कि प्रारम्भिक भाषा का विकास गणित सीखने के लिए भी बहुत जरूरी है। लेकिन गणित की एक और समस्या यह है कि शुरू में 'गणितीय चिह्न पहचानकर संख्या संक्रिया में उपयोग' (symbol manipulation) के माध्यम से गणित सीखने का भान दिया जा सकता है।

मतलब यदि आप किसी बच्चे से कहें कि एक से सौ तक गिनती लिखो तो वह उन संख्याओं के मान और उन संख्याओं के बारे में किसी समझ के बिना पैटर्न के आधार पर लिख सकता है। इस प्रकार से पैटर्न के आधार पर जोड़, बाकी, गुणा सब कुछ किया जा सकता है। यह गणित में बहुत देर तक चल सकता है क्योंकि गणित के संकेत चिह्न बहुत (notation) निश्चित हैं और उनमें एक तरफ जहाँ तर्क है तो दूसरी तरफ बहुत सशक्त पैटर्न भी है। आप तर्क के बिना पैटर्न के आधार पर गणित के सवाल कर सकते हैं। तो यह जो समस्या है इस समस्या से छुटकारा आप तभी पा सकते हैं जब आपके पास गणित पर बात करने के लिए भाषा हो।

दिगन्तर की दूसरी मान्यता गणित में बात करने, सोचने और संवाद करने को लेकर थी। मुझे इस बात का काफी अनुभव है कि यदि आप प्राथमिक और उच्च प्राथमिक शिक्षकों से केवल इतना पूछें कि अंक (number), संख्या (number), और संख्या अंक (numerals) में क्या फर्क है तो आप पाएँगे कि बहुत भ्रमित जवाब और विचार आएँगे। एक जाना माना जवाब यह मिलेगा कि एक से नौ तक के तो अंक (digit) होते हैं और उससे ऊपर संख्याएँ होती हैं अर्थात् नौ से नीचे संख्या नहीं होती (हँसते हुए)। मैं यह कहने की कोशिश कर रहा हूँ कि हमारे पास गणित में बात करने के लिए उचित किस्म की भाषा तक नहीं है। तो ये कुछ मान्यताएँ थीं जिनको लेकर हम लोगों ने गणित में अलग तरह से काम करना शुरू किया। यह सब कैसे किया और उसमें आगे क्या क्या परिवर्तन हुए वो आपके बाकी सवालों के जवाब में आ जाएगा।

गणित में एक और बहुत महत्वपूर्ण बात जिस पर बहुत कम ध्यान दिया जाता है वो यह है कि यदि आपने गणित को 'गणितीय चिह्न पहचानकर संख्या संक्रिया में उपयोग' (symbol manipulation) के माध्यम से सीखा है तो ऐसी गणित थोड़ी देर बार ठप हो जाती है क्योंकि संश्लिष्टता, पहले सीखे हुए पर निर्भरता और क्रमबद्धता बाकी विषयों की अपेक्षा गणित में कहीं

ज्यादा है। इस पर ज्यादा बात करने की जरूरत नहीं है क्योंकि यह सभी समझते हैं कि यदि आपने जोड़ नहीं समझा है तो आप गुणा नहीं समझ सकते, आपने बाकी नहीं समझा है और गुणा नहीं समझा है तो आप भाग नहीं समझ सकते। इस प्रकार यदि गणित में पहले की अवधारणाओं की समझ नहीं है तो आगे जाकर आपके पास रटने के अलावा कोई रास्ता नहीं बचता। इसलिए ये बहुत जरूरी हो जाता है कि आरम्भिक गणित से बहुत सही ढंग से पेश आया जाए और इस पर हम लोगों ने काफी काम किया है।

एक और बात जिसका जिक्र हम सभी करते हैं और जिसका उल्लेख राष्ट्रीय पाठ्यचर्या २००५ के साथ लिखे गए गणित शिक्षण के पर्चे में भी किया गया है वो ये है जो हमने पहले बात की थी कि आगे सीखने के लिए मानसिक विकास जरूरी है, मानसिक विकास के लिए अनुभव और विचार जरूरी हैं और भाषा के बिना विचार सम्भव नहीं है।

लेकिन असल में विचार को बेहतर करने के लिए तर्क की भी जरूरत होती है और तर्क की मूलभूत संरचना बहुत अमूर्त होती है। तो यदि आपको बच्चे को तार्किकता सिखानी है तो गणित उसका सबसे अच्छा माध्यम है। इसका मतलब यह हुआ कि हमारे मानसिक विकास के मूल में भाषा और गणित हैं और इसलिए गणित पर विशेष ध्यान देने की जरूरत से है।

मुझे ऐसा भी लगता है कि हम लोग तार्किक चिन्तन पर भी कम ध्यान देते हैं। उसके बहुत सारे कारण हैं, कुछ वैचारिक हैं, कुछ बिना समझे हैं। लेकिन आप बाकी कुछ भी कहे कौटिल्य की एक बात बहुत सही है, वो अपनी किताब के दूसरे अध्याय की शुरुआत में ही कहते हैं कि “आन्वीक्षिकी सभी विद्याओं की शाश्वत प्रदीप है” अर्थात् तर्क के बिना बाकी विद्याओं का बोध नहीं हो सकता, उनका उजाला नहीं फैलेगा।

## लेकिन असल में विचार को बेहतर करने के लिए तर्क की भी जरूरत होती है और तर्क की मूलभूत संरचना बहुत अमूर्त होती है।

तो अब यदि हम दोबारा से देखें तो ये दिगन्तर की मान्यताएँ रही हैं जो पाठ्यचर्या २००५ में और उसके गणित के पर्चे में भी बहुत स्पष्ट हैं। तो इस बात को ध्यान में रखते हुए हमें गणित के लिए कुछ ऐसा तरीका अपनाना पड़ा जिसमें अनुभव, भाषा, चिन्तन और समस्याओं का स्वयं समाधान इन चार बातों के आधार पर एक क्रमबद्ध तरीके से गणित की समझ विकसित हो। उसका विस्तृत वर्णन या कुछ उदाहरण मैं आगे दे दूँगा। आप ये कह सकते हैं कि ये कुछ सैद्धान्तिक मान्यताएँ हैं जो मुझे अभी भी लगता है कि गणित में बहुत जरूरी हैं।

**प्रश्न :** अब हम तीसरे सवाल पर आते हैं कि पाठ्यचर्या से सम्बन्धित नीतिगत बदलावों को ध्यान में रखते हुए गणित शिक्षण में बदलाव लाने की कितनी जरूरत है या फिर क्या हम ऐसा बोल सकते हैं कि गणित शिक्षण की मान्यता शाश्वत है और नीतिगत बदलावों से स्वतन्त्र है?

**उत्तर :** देखिए आप ये तो कह सकते हैं और इस पर बहस भी की जा सकती है कि गणित में जो स्वतः सिद्ध संरचना (axiomatic structure) बन चुकी है वो शाश्वत है लेकिन ये कहना कि गणित शिक्षण की मान्यताएँ शाश्वत हैं, ये तो बड़ी विचित्र बात हो जाएगी। कुछ बातों को शाश्वत माना जा सकता है जैसे चाणक्य की वह बात जिसके बारे में मैंने पहले बताया था कि “आन्वीक्षिकी सभी विद्याओं की शाश्वत प्रदीप है।” अब आप न मानना चाहें तो न मानें हो सकता है कि आपके पास कोई और प्रदीप हो (हँसते हुए)।

इसी प्रकार से कांट की ये बात कि बिना अवधारणाओं के अनुभव अन्धा होता है तो आप चाहे अनुभव पर बड़ी बड़ी कविताएँ लिख लीजिए और भावनात्मक रूप से खुश हो लीजिए लेकिन वैचारिक स्तर पर यदि आप दुनिया के बारे में बोध या ज्ञान विकसित करने में उसका उपयोग करना चाहते हैं तो आपको अवधारणा की जरूरत पड़ेगी। ऐसी कुछ बातें हो सकती हैं जो शाश्वत हैं लेकिन असली समस्या यह नहीं है, असली समस्या यह है कि गणित के बारे में हमारी अपनी जो मान्यताएँ हैं वो असल में बहुत स्पष्ट रूप से हमारे शिक्षाक्रम वगैरह में आई नहीं हैं।

मुझे ऐसा लगता है कि लोग गणित का जो दृष्टिकोण उपयोग कर रहे हैं वह समस्याजनक है। यदि हम पाठ्यचर्या २००५ को देखें तो उसमें उस दृष्टिकोण को बदलने की बात की गई है और यह जरूरी भी है। पहले मैं उस दृष्टिकोण के बारे में बताता हूँ। एक दृष्टिकोण यह है कि गणित विज्ञान की तरह है अर्थात् विज्ञान में आप अनुभव करेंगे, प्रयोग करेंगे, रीडिंग लेंगे, उन रीडिंग का औसत निकालेंगे और उससे ज्ञान बन जाएगा। इसके लिए मान लीजिए हमने प्रयोग के तौर पर एक चने का पौधा उगाकर देखा कि सात दिन में उगा, दोबारा देखा कि सात दिन में उगा, तीसरी बार देखा कि नौ दिन में उगा तो औसत निकाल लिया कि साढ़े सात दिन में उगता है।

तो गणित को लेकर एक दृष्टिकोण यह है जो कि एकदम गलत है। गणित ऐसे काम करती ही नहीं है। दूसरे दृष्टिकोण के तहत यह कहा जाता है कि गणित की प्रयोगशाला बना दीजिए और बच्चों को बहुत से प्रयोग करने दीजिए, इससे बच्चे अपने आप से खोज कर लेंगे। इसमें समस्या यह है कि बोधात्मक अवधारणाओं (perceptual concepts) की खोज तो हो सकती है लेकिन सैद्धान्तिक अमूर्त अवधारणाओं (theoretical abstract concepts) की नहीं हो सकती और होगी भी तो दस हजार साल लगेंगे।

अगर इस प्रकार की खोज किसी व्यक्ति द्वारा की जाए तो उसमें भी बहुत मेहनत लगेगी। जैसे अगर आप आज किसी बच्चे को यह खोज करने को कहें कि अभाज्य संख्या (prime number) क्या होती है तो उसको यह खोज करने में हजार साल तक लग जाएंगे। शिक्षा के कई दर्शनशास्त्रियों ने यह तर्क दिया है कि यदि उचित वातावरण दिया जाए तो बोधात्मक (perceptual) और व्यावहारिक (functional) अवधारणाओं की खोज सम्भव है लेकिन जो सैद्धान्तिक अवधारणाएँ किसी चीज को समझने के लिए जानबूझकर किसी इन्सान द्वारा बनाई गई हैं उनकी खोज बहुत मुश्किल है। यह उन्हें किसी ऐसे व्यक्ति को बताना पड़ेगा जो पहले से उनके बारे में जानता हो।

**प्रश्न :** तो रोहित जी यहाँ पर यदि आप गणित शिक्षा के सन्दर्भ में बोधात्मक श्रेणी में आने वाली अवधारणाओं और सैद्धान्तिक श्रेणी में आने वाली अवधारणाओं के एक दो उदाहरण दें तो हमारे पाठकों को समझने में कुछ सुविधा होगी।

**उत्तर :** देखिए समस्या यह है कि गणित में लगभग सभी अवधारणाएँ अमूर्त हैं। उनकी समझ तो हो सकती है, संवाद के माध्यम से उस तरफ इशारे हो सकते हैं और बच्चे अपने दिमाग में अवधारणाएँ निर्मित कर सकते हैं लेकिन वो स्वयं यह सब समझ सकेंगे या खोज सकेंगे यह मुश्किल है। हम कुछ उदाहरण लेते हैं, ये उदाहरण लोगों को बड़े अजीब से लग सकते हैं।

हम यहाँ से शुरू कर सकते हैं कि पाँच क्या है? क्या सचमुच में पाँच कोई मूर्त अवधारणा है? उदाहरण के लिए हम कह सकते हैं कि ये पाँच उँगलियाँ (अंगूठे सहित) हैं, पाँच कंचे हो सकते हैं, पाँच भैंसे हो सकती हैं, पाँच हाथी हो सकते हैं, लेकिन पाँच है क्या? और आप इस समझ को कैसे विकसित करेंगे कि आप पाँच को अलग अलग मूर्त और अमूर्त चीजों के सन्दर्भ में इस्तेमाल कर सकते हैं?

ये समझ तभी विकसित होगी जब हम इसे अनुभव करेंगे और उस अनुभव पर बात करेंगे। अब ये तो एकदम सरल अवधारणा है, अगर आप थोड़ा आगे चलें तो भाज्यता (divisibility) जो कि तीसरी चौथी में ही काम में आ जाती है, उसे सिखाते समय जब आप जोड़ की बात करते हैं उसमें आप दो चीजें पाँच और सात लेते हैं जो अपने आप में अमूर्त हैं और अब आप पाँच और सात में एक ऐसा सम्बन्ध बना रहे हैं कि वो एक तीसरी चीज दे पा रहा है। ये सारा का सारा जो खेल है ये तो पूरी तरह बनाया हुआ और अमूर्त खेल है। एल्गोरिथम (algorithms) भी इसी तरह की हैं। तो पूरी की पूरी गणित ही इस तरह से चलती है। गणित में सिर्फ और सिर्फ तीन आयामों वाले ठोस आकारों का ही प्रत्यक्ष अनुभव किया जा सकता है। समस्या तब होती है जब हम समझते हैं कि हम बच्चे को प्रत्यक्ष अनुभव द्वारा रेखा की अवधारणा और तल (plane) की अवधारणा भी सिखा सकते हैं। यहीं पर हम

गलती करते हैं और बाद में फिर रेखा हमेशा बच्चे के दिमाग में मूर्त चीज बनी रहती है। आगे चलकर जब नौवीं दसवीं कक्षा में रेखा का समीकरण बनाते हैं तो न तो उसका कोई आकार होता है और न ही कुछ और, आपके सामने केवल इतना लिखा होता है  $Y = NX + C$  एक रेखा है और एक अन्य रेखा  $Y = M1X + C2$  है और ये किसी बिन्दु पर एक दूसरे को काट रही हैं।

**मुझे ऐसा लगता है कि लोग गणित का जो दृष्टिकोण उपयोग कर रहे हैं वह समस्याजनक है। यदि हम पाठ्यचर्या 2005 को देखें तो उसमें उस दृष्टिकोण को बदलने की बात की गई है और यह जरूरी भी है।**

यह सारा जो खेल है इसमें अमूर्त सैद्धान्तिक अवधारणाएँ शामिल हैं। अब ऐसे में अगर आप इसे रेखा की अपनी पिछली वाली समझ कि तना हुआ धागा या एक सीधा डण्डा या लोहे का सीधा पाइप, को आधार बनाकर समझने का प्रयास करेंगे तो वो सब काम नहीं करने वाला। इसे दूसरे ढंग से कहें तो हम अपने अनुभव पर चिन्तन के माध्यम से उसका अमूर्तिकरण करते जाते हैं और उसमें से सारा भौतिक पदार्थ निकाल देते हैं। इसे थोड़ा इस तरह से देखिए, रेखा के बारे में यूक्लिड साहब कहते हैं कि बिना मोटाई और चौड़ाई की सिर्फ लम्बाई वाली चीज, तो जब आप मोटाई और चौड़ाई निकाल देंगे तो आपके दिमाग में एक खाली खाका बचेगा। अब अगर 5 की बात करें और इसे पाँच कंचे या कंकड़, पाँच ये या पाँच वो जैसी मूर्त चीजों से जोड़कर न देखें तो बाकी क्या बचा? बाकी एक मानसिक संरचना बची। तो सतत अमूर्तिकरण की इस प्रक्रिया पर हम अच्छी तरह से ध्यान नहीं देते हैं।

एक और समस्या यह है कि बहुत सारी अवधारणाएँ ऐसी हैं जो असल में पहले प्रक्रिया होती हैं और बाद में निश्चित रूप धारण करके अवधारणा बन जाती हैं और फिर उनको आप आगे मूर्त चीजों के रूप में काम में लेना शुरू कर देते हैं।

उदाहरण के लिए संख्या को समझने के लिए पहले आप कुछ चीजें लेते हैं और शब्दों का प्रयोग कर उन्हें गिनने की प्रक्रिया करते हुए उन चीजों का एक एक करके मिलान करते जाते हैं। जब आप एक, दो, तीन, चार.....आठ ऐसा बोलते हुए आठ पर रुक जाते हैं तो इस समूह का आखिरी शब्द यानी 'आठ' एक निश्चित रूप धारण करके संख्या बन जाता है। अब आप कहेंगे कि 8 और 2 को गुणा करें तो कितना होगा? 2 भी वैसे ही बना है जैसे 8 बना है। अब 8 और 2 प्रक्रिया से अलग दो स्वतन्त्र इकाई बनकर आपस में अन्तःक्रिया (interact) करने लगे हैं।

इस प्रकार गणित की अवधारणाएँ दोहरी प्रकृति की हैं, पहले एक प्रक्रिया और फिर प्रक्रिया से अलग होकर एक निश्चित रूप धारण करके एक इकाई बन जाना और फिर और इकाइयों (entities) को पैदा करने के लिए उस इकाई को काम में लेना। मुझे लगता है इसमें बहुत सारा अमूर्तिकरण है और वह बिना चिन्तन के और बिना बातचीत के नहीं हो सकता है।

गणित का जो पर्चा है उसमें गणित शिक्षण के दो प्रकार के उद्देश्य लिखे हैं जिसके बारे में जानते तो सभी हैं लेकिन इस पर कितना ध्यान देते हैं यह पता नहीं। एक उद्देश्य तो सीधा साधा है— जीवन में गणित का उपयोग अर्थात् सब्जी खरीदने से लेकर आपका ईएमआई या भारतीय बजट की गणना करने तक। लेकिन उस पर्चे में यह भी लिखा है कि गणित वास्तव में आपके आन्तरिक संसाधनों को विकसित करने का काम भी करती है, मतलब अमूर्त और सटीक चिन्तन (precision) गणित में बहुत महत्वपूर्ण है।

यदि आप इस हिस्से पर सिर्फ और सिर्फ ठोस साधनों के माध्यम से और बिना बातचीत के काम करेंगे तो यह पूरा का पूरा छूट जाएगा और वो एक बड़ी समस्या है जो आजकल हमारे साथ हो रही है। इसलिए मुझे ऐसा लगता है कि बदलाव तो करना पड़ेगा और हमें यह भी समझना पड़ेगा कि गणित की समझ भी लगातार बदलती है।

**देखिए समस्या यह है कि गणित में लगभग सभी अवधारणाएँ अमूर्त हैं। उनकी समझ तो हो सकती है, संवाद के माध्यम से उस तरफ इशारे हो सकते हैं और बच्चे अपने दिमाग में अवधारणाएँ निर्मित कर सकते हैं लेकिन वो स्वयं यह सब समझ सकेंगे या खोज सकेंगे यह मुश्किल है।**

अब मैं अपनी पाठ्यचर्या में से एक छोटा सा उदाहरण देता हूँ। आप पाएँगे कि 2005 की पाठ्यचर्या इस बात का जिक्र करती है कि गणित में केवल प्रक्रियाएँ और गणितीय तथ्य सीखने से काम नहीं चलेगा उसके पीछे की ज्ञानमीमांसा (epistemology) का अभ्यास और गणित के कुछ सोचने के तरीके भी सिखाए जाने चाहिए। पाठ्यचर्या में अन्य विषयों के सन्दर्भ में भी ज्ञानमीमांसा की बात की गई है। लेकिन 88 की पाठ्यचर्या में यह बात विज्ञान के लिए तो कही गई है लेकिन गणित के लिए नहीं, तो ऐसा नहीं है कि गणित के बारे में सभी दस्तावेज एक प्रकार की समझ रखते हैं।

तो मैंने बात यहाँ से शुरू की थी कि एक तो गणित को विज्ञान की तरह पढ़ाते हैं दूसरा भाषा या इतिहास की तरह (हँसते हुए) और तीसरा ये माना जाता है कि ठोस साधन (manipulants) दे दिए जाएँगे और उनके माध्यम से खोज हो जाएगी। इन तीनों पद्धतियों के फायदे और नुकसान दोनों हैं। ऐसे में हमें विभिन्न स्रोतों से विचार लेकर एक ऐसी ग्रहणशील पद्धति ऐसी बनानी होगी जिसमें हमने जो शुरू में बात की थी कि मानसिक विकास एक संश्लिष्ट और जैविक प्रक्रिया है उस हिस्से पर ध्यान दिया जाए, तो उस दृष्टि से देखें तो परिवर्तन की जरूरत तो है। अब ये कितना हो रहा ये मुझे नहीं पता, मैंने हाल में इस पर कोई अध्ययन नहीं किया है।

**प्रश्न :** अब हम अपने चौथे सवाल पर आ सकते हैं। नई शिक्षा नीति बुनियादी संख्या ज्ञान और बुनियादी भाषा दोनों पर ध्यान देने की बात कहती है लेकिन फिर भी अधिकतर संस्थाएँ बुनियादी साक्षरता पर तो ध्यान देती हैं पर संख्या ज्ञान पर उतना ध्यान नहीं देती। कुछ वर्षों से बुनियादी गणित पर ध्यान देने की बात क्यों की जा रही है? नीतियों में अचानक से प्रारम्भिक अंक ज्ञान और गणितीय कौशलों की बात क्यों होने लगी है? आपके अनुसार ये परिवर्तन क्यों आया है?

**उत्तर :** देखिए मैं इस पर पहले ही बात कर चुका हूँ कि आगे कुछ भी सीखने के लिए भाषा और गणित बहुत महत्वपूर्ण हैं। सीखना पहले सीखे हुए के आधार पर ही होता है। हमने यह भी बात की थी कि बाकी विद्याएँ सीखने के लिए तर्क की, भाषा की, अमूर्तिकरण की और प्रमात्रीकरण (quantification) की जरूरत पड़ती है। ये सब आप शुरू में भाषा और गणित के माध्यम से ही सीखते हैं और यदि आपने शुरू में इन पर काम नहीं किया तो इस खामी से उबरने के लिए आपके पास रटने के अलावा कोई चारा नहीं बचेगा।

मेरा व्यक्तिगत तौर पर ये मानना है कि हमारे यहाँ रटना इतना ज्यादा होने का कारण समझना बन्द होना है और समझना बन्द इसलिए हो जाता है क्योंकि शुरू में हम विचार बनाते हुए, अवधारणाएँ बनाते हुए, उनमें सम्बन्ध बनाते हुए ज्ञान निर्मित करने का काम नहीं करते।

न तो हम पढ़ने का काम उस तरह से करते हैं न ही गणित का और न ही हम बच्चे में तर्क विकसित करने के लिए उसे यह छूट देते हैं कि वह खुद से सोचकर नतीजे निकाले। हम कुछ चीजें उसके दिमाग में भरने की कोशिश करते हैं जो बच्चे के दिमाग में अलग अलग पड़ी रहती हैं। तो अब लोगों को ये समझ आ रहा है कि अगर आपने पहली, दूसरी और तीसरी कक्षा में भाषा और गणित ठीक से नहीं सिखाई तो आप आगे कितनी भी कोशिश करते रहिए ये समस्या हमेशा रहेगी। मेरे विचार से ये समस्या हम जितना समझते हैं उससे ज्यादा गम्भीर है।

मैंने वास्तव में जमीनी स्तर पर ऐसे प्रयोग किए हैं कि अगर आप शिक्षकों के समूह को दिवास्वप्न जैसी सरल किताब पढ़ने को दें तो वो उसके निहितार्थ नहीं समझते। वो कहानी सुना देंगे कि इसमें ऐसा हुआ, वैसा हुआ लेकिन असल में उस पुस्तक में कहा क्या जा रहा वो ये नहीं समझते और वो स्नातक हो सकते हैं। तो समझने में कठिनाई की ये समस्या सतत रूप से आगे चलती रहती है।

## एक और समस्या यह है कि बहुत सारी अवधारणाएँ ऐसी हैं जो असल में पहले प्रक्रिया होती हैं और बाद में निश्चित रूप धारण करके अवधारणा बन जाती हैं और फिर उनको आप आगे मूर्त चीजों के रूप में काम में लेना शुरू कर देते हैं।

मेरे विचार से ये इसलिए नहीं होता कि लोगों में दिमाग नहीं होता ये इसलिए होता है क्योंकि हमसे एक जो बहुत बड़ी गलती होती है वो ये कि हम असल में बचपन से ही लोगों में सीखने की अवधारणा के बहुत भिन्न अर्थ गढ़ देते हैं। जैसे पढ़ने की अवधारणा डिकोडिंग तक, गणित सीखने की अवधारणा पहाड़े बोलने या एल्गोरिथम लगाने तक सीमित हो जाती है। पढ़ने की अवधारणा में से अर्थ और गणित में से तर्क गायब हो जाता है। फिर ये चार, पाँच, छह साल में दृढ़ हो जाती है और बाद में जब मैं एक अनुच्छेद की डिकोडिंग कर लेता हूँ तो घोषित कर देता हूँ कि मैंने पढ़ लिया और ये सतत होता रहता है, मैं इस पर ध्यान ही नहीं देता। तो इसलिए बुनियादी स्तर पर इन दोनों पर ध्यान देना बहुत जरूरी है लेकिन ये केवल इनकी माला जपने से नहीं होने वाला।

**प्रश्न :** जी। तो सवाल यह है कि पिछले दो तीन साल से राष्ट्रीय स्तर पर प्रारम्भिक अंक ज्ञान को लेकर जो माला जपने का काम हो रहा हो रहा आपके अनुसार वो परिवर्तन क्यों हुआ और कैसे हुआ है?

**उत्तर :** देखिए क्यों हुआ है इसका जवाब मुझे बहुत ठीक से तो नहीं पता लेकिन दो तीन कारण हो सकते हैं। एक तो थोड़ा सा हमको ये ध्यान देना चाहिए कि लगभग 1980 के बाद से पश्चिमी देशों ने शिक्षा और आर्थिक विकास के बीच सम्बन्ध देखना और उसको स्थापित करना शुरू कर दिया था। हालाँकि ऐसा यह समझने के लिए हुआ कि समाज शिक्षा पर जो पैसा खर्च कर रहा है उसका कोई प्रतिफल मिल रहा है या नहीं और इस आर्थिक दृष्टि से गुणवत्ता पर ध्यान गया। अब क्योंकि भारत को बहुत जल्दी जल्दी आर्थिक विकास करना है तो गुणवत्ता पर ध्यान देना जरूरी है। तो एक वजह तो मुझे ये लगती है।

दूसरा यह है कि लगातार बहुत सारे सर्वेक्षण होते रहे हैं जिनसे पता चलता है कि हमारे बच्चों को पढ़ना भी नहीं आता और उन्हें अंक गणित तक ठीक से नहीं आता, बाकी गणित तो छोड़ ही दीजिए। इन दिनों आप यह भी सुन रहे हैं कि हम विश्व गुरु बनने की कामना भी रखते हैं तो ये तो बहुत बुद्धू किस्म का विश्व गुरु हो गया जिसे पढ़ना, जोड़, बाकी भी नहीं आता। तो एक तरफ ये समस्या है।

दूसरी तरफ पूरी दुनिया में तुलना शुरू हो गई है और हम खुद अपनी तुलना दूसरों के साथ करते हैं। तो ये सारी चीजें एक साथ मिल रही हैं और इससे ही मुझे लगता है कि ये सकारात्मक विचार उत्पन्न हुआ है कि केवल पत्तों में पानी देने से काम नहीं चलेगा आपको उसकी जड़ों में पानी देना पड़ेगा। तो ये चिन्तन यहीं से निकला है कि यदि आप इस समस्या पर शुरू में ही अच्छी तरह से काम नहीं करेंगे तो आगे इसे दुरुस्त नहीं किया जा सकेगा। लेकिन मुझे इस पर सन्देह है कि 'अच्छी तरह से काम करने' से नीति-निर्धारकों का क्या तात्पर्य है। वो हमेशा 'अनुभव से सीखना', 'मजे के साथ सीखना', 'अवधारणाओं को सीखना' जैसी शब्दावलियाँ फेंकते रहते हैं लेकिन वास्तव में इन सबका क्या मतलब है इसका कोई विवरण कहीं उपलब्ध नहीं है।

**प्रश्न :** जी। तो इसी को आधार बनाकर हम अपनी बातचीत को आगे बढ़ा सकते हैं। वैसे तो आप देखेंगे कि भारत में प्रारम्भिक गणित पर काम करने वाली ज्यादा गैर सरकारी संस्थाएँ और सरकारी संस्थाएँ हैं ही नहीं। लेकिन जो संस्थाएँ इस पर काम शुरू करना चाहती हैं या जो किसी और क्षेत्र में काम कर रही हैं पर प्रारम्भिक अंक ज्ञान पर काम करना शुरू करना चाहती हैं क्या आप उन्हें गणित शिक्षा के उन शैक्षणिक पहलुओं के बारे में बता सकते हैं जो उनके लिए प्रासंगिक हों? आपने शुरू में हमें गणित शिक्षण के कुछ मुख्य शैक्षणिक पहलुओं के बारे में बताया। क्या आप कुछ अन्य पहलुओं पर भी चर्चा करना चाहेंगे या आप जिन पहलुओं के बारे में हमें बता चुके हैं उन्हें थोड़ा और विस्तार से बताना चाहेंगे?

**उत्तर :** मैं इस पर बात करूँगा कि बुनियादी गणित पर ध्यान देने के लिए किन शैक्षणिक पहलुओं पर ध्यान देना चाहिए। हो सकता है कि बहुत से शोधकर्ता और गणित के शिक्षाविद मेरी बात से सहमत न हों लेकिन मैंने अपने तीन तरह के अनुभवों के आधार पर ये विचार बनाए हैं— एक तो जब मैं शिक्षा के क्षेत्र में आया तो उससे पहले शिक्षा के दर्शनशास्त्र पर शोध कर रहा था, दूसरा मैं 15 साल तक पहली से पाँचवीं तक के बच्चों को पढ़ाता रहा हूँ और तीसरा मैं शिक्षा के दर्शनशास्त्र में काम करता हूँ तो मुझे ऐसा लगता है कि शिक्षाशास्त्र में कुछ मूल बातों पर ध्यान देना आवश्यक है। मैं बिन्दुवार उनके बारे में बताता हूँ और फिर बाद में हम इन पर विस्तार से बात करेंगे।

पहली बात तो यह है कि हमको गणित की प्रकृति पर ध्यान देना पड़ेगा, मतलब बच्चों को गणित की प्रकृति समझाने की जरूरत नहीं लेकिन जो गणित पढ़ा रहा है उसको गणित की प्रकृति समझनी पड़ेगी वरना वो ऐसी गणित पढ़ाएगा जो आगे जाकर ठप हो जाएगा। अर्थात् हमें ये समझना पड़ेगा कि हम बच्चे को एक अमूर्त दुनिया में ले जा रहे हैं और जब तक वो कल्पनाशक्ति के सहारे अमूर्त तत्वों को प्रयोग में लेना नहीं सीखेगा तब तक काम नहीं चलेगा। दूसरा ये कि आप गणित को विज्ञान की तरह प्रयोग से नहीं सिखा सकते, अभी के लिए कंकड़ गिनना वगैरह ठीक है लेकिन आपका अन्तिम उद्देश्य तार्किक औचित्य तक जाना है।

तो अगर आप तीसरी चौथी में इस ढंग से पढ़ाते हैं कि बच्चे के दिमाग में ये बात बैठ जाए कि तार्किक औचित्य की जरूरत ही नहीं है, गणित ऐसे ही चलती है तो आप असल में उसके गणित के विकास को बाधित कर रहे हैं। तो शिक्षकों को गणित की प्रकृति को समझना होगा और गणित की प्रकृति में अमूर्तता, निश्चितता शामिल है। बहुत से लोग ये कहते हैं कि गणित में एक ही उत्तर नहीं होता बहुत से उत्तर होते हैं तो असल में बहुत सी चीजों का एक ही जवाब होता है। दूसरा सवाल जो शाश्वतता को लेकर है तो हाँ बहुत सारी गणित शाश्वत ही है, जैसे— जब तक संख्या प्रणाली के पीछे के स्वयं सिद्ध वक्तव्य (axiom) को ना बदला जाए तब तक दो और दो चार ही होंगे, वो कभी भी साढ़े तीन नहीं होंगे। भारत में ऐसे बहुत से प्रसिद्ध गणितज्ञ हैं जो कहते हैं कि साढ़े तीन या साढ़े सात भी हो जाएँ तो मुझे लगता है कि वो संख्या की प्रकृति को गलत समझ रहे हैं।

**मेरा व्यक्तिगत तौर पर ये मानना है कि हमारे यहाँ रटना इतना ज्यादा होने का कारण समझना बन्द होना है और समझना बन्द इसलिए हो जाता है क्योंकि शुरू में हम विचार बनाते हुए, अवधारणाएँ बनाते हुए, उनमें सम्बन्ध बनाते हुए ज्ञान निर्मित करने का काम नहीं करते।**

तो एक तो इसे समझना पड़ेगा दूसरा ये समझना पड़ेगा कि गणित सीखने में अनुभव और विश्लेषण का रिश्ता बहुत गहरा है क्योंकि जब तक आपको अनुभव नहीं होगा तब तक आपके पास वो आधार नहीं होगा जिस पर बातचीत की जा सके या जिसका विश्लेषण किया जा सके। और यदि आप विश्लेषण नहीं करेंगे तो अमूर्तिकरण तक नहीं पहुँच सकेंगे।

फिर से अगर हम गिनने का ही उदाहरण लें तो ठीक है कि हम पत्थर या कंचों से गिनते हैं लेकिन अगला सवाल ये भी तो पूछा

जा सकता है न कि यह बात सिर्फ कंचों पर ही लागू होती है या बटन पर भी लागू होगी? यहाँ आप उसको अमूर्तिकरण की तरफ ले जा रहे हैं और जब आप ये कहते हैं कि ये बात तालियों पर भी लागू होती है तो आप उसे और सोचने के लिए प्रेरित कर रहे हैं। और जब आप कहते हैं कि मान लो तुम्हारे घर में फ्रिज है और उसमें चॉकलेट पड़ी हुई है, उस पर भी लागू होती है। अर्थात् ये काल्पनिक चीजों पर भी लागू हो रही है। अब भले ही उसके घर में फ्रिज न हो, न ही उसमें चॉकलेट हों लेकिन वो कल्पना कर सकता है। अगर वो कंचे न होते तो ये संवाद नहीं हो सकता था और जब संवाद नहीं होगा तो बच्चे की कल्पना कंकड़ गिनने तक ही सीमित रहेगी।

तो मैं ये कहने की कोशिश कर रहा हूँ कि अनुभव और संवाद के माध्यम से विश्लेषण के रिश्ते को हमें गणित के शिक्षाशास्त्र में फिर से देखना पड़ेगा। तीसरी बात ये है कि इस समय हमारे पास कोई मानक भाषा नहीं है जिसमें हम बच्चे के साथ गणित का संवाद कर सकें। हमारी किताबों में भी नहीं है और शिक्षक शिक्षा की जो किताबें हैं उनमें भी नहीं है।

**प्रश्न :** तो रोहित जी आप ये भारतीय भाषाओं के बारे में बात कर रहे हैं या फिर अंग्रेजी में भी ऐसी ही समस्या है?

**उत्तर :** नहीं नहीं मैं अंग्रेजी, हिन्दी की बात नहीं कर रहा हूँ मैं ये कहना चाहता हूँ कि बच्चे के साथ काम करते समय अनुभवों को सटीक ढंग से व्यक्त करने का अभ्यास हमें नहीं है और ये भ्रम आगे तक चलता है। मान लीजिए कि एक शिक्षक बच्चे को समझाता है कि मैंने तुमको जितनी चीजें दी हैं उनको गिनो और जो आखिरी शब्द है उसे बोलो। तो कुछ शिक्षक ऐसे समझाते हैं कि जब तुम गिन रहने हो तो पहले पत्थर को तुमने नाम दिया एक, इसको नाम दिया दो, इसको नाम दिया तीन, इसको नाम दिया चार, इसको नाम दिया पाँच तो ये संख्या है। अब यहाँ एक बहुत बड़ा भ्रम हो रहा है। ये एकदम गलत है और शिक्षक ऐसा बोलते हैं। तो इस वक्त भाषा नहीं है कहने से मेरा मतलब ये नहीं कि हिन्दी, अंग्रेजी या उड़िया में सम्भव नहीं, मैं कह रहा हूँ कि हमारे शिक्षाशास्त्रीय विमर्श में ये ठीक से नहीं आया है कि इस पर कैसे काम करें।

अब आप कल्पना कीजिए कि कोई शिक्षक बच्चों को लगातार ऐसे ही सिखाता रहा है तो बच्चा उससे क्या समझ रहा है, उसमें लगातार भ्रम है। चौथी बात जो हमारे शिक्षक साथियों को बहुत बुरी लगेगी वो ये कि हमारे कितने शिक्षक हैं जो वाकई में गणित की विषयवस्तु को ठीक से समझते हैं। हमने इस पर ध्यान दिया है क्या? मैं एक सरल सा उदाहरण देता हूँ जो मेरा बहुत प्रसिद्ध उदाहरण है। आप माध्यमिक कक्षाओं में पढ़ाने वाले ऐसे अध्यापकों से बात कीजिए जो उच्च माध्यमिक कक्षाओं में नहीं पढ़ाते हैं, आप उनसे भाग और एल्गोरिथम की तार्किक रूप से

व्याख्या करने को कहिए। उनसे ये पूछिए कि क्या हम भाग को उल्टी तरफ से करने की विधि ईजाद कर सकते हैं? आप पाएँगे कि अधिकतर नहीं कर पाएँगे और सौ में से एक दो ही वर्गमूल निकालने की भाग वाली विधि का तर्क बता पाएँगे। तो मैं ये कहने की कोशिश कर रहा हूँ कि शिक्षकों को सवाल हल करने आ सकते हैं लेकिन उनमें विषयवस्तु की समझ कितनी है इस पर सवालिया निशान है।

**प्रश्न :** क्यों कर रहे हैं और कैसे कर रहे हैं इसकी समझ?

**उत्तर :** हाँ और ये जो समस्या है ये बहुत गम्भीर है। यदि शिक्षक इस बात पर ध्यान देते तो वैदिक गणित बिल्कुल लोकप्रिय न होती। अभी गणित की कुछ ऐसी किताबें भी आई हैं जिनमें ट्रिक्स तो बहुत सारी हैं लेकिन क्यों हैं? तो हम लगभग वही गणित पढ़ा रहे हैं, वही से मेरा मतलब उस ट्रिक से नहीं है लेकिन तरीका वही है। तो ये अगली समस्या है और ये बात मैं फिर दोहरा देता हूँ कि अनुभव, सामग्री और विश्लेषण इनका सन्तुलन जरूरी है। देखिए एक तरीका हम लोग निकालते हैं कि सब जगह गणित की प्रयोगशाला बना दो और बहुत सारी सामग्री बना दो। अब इन दिनों गणित की इतनी सामग्री आ रही है लेकिन वह सामग्री अवधारणात्मक रूप से कितनी मजबूत है और उससे अवधारणाएँ निर्मित करने में कितनी मदद मिलेगी इस पर प्रश्न चिह्न है और इस तरह से विश्लेषण करना भी लोगों के लिए समस्याजनक है।

**न तो हम पढ़ने का काम उस तरह से करते हैं न ही गणित का और न ही हम बच्चे में तर्क विकसित करने के लिए उसे यह छूट देते हैं कि वह खुद से सोचकर नतीजे निकाले।**

एक चीज होती है गिनमाला या गणितमाला। मैं गणितमाला की कोई बुराई नहीं कर रहा हूँ, ये बहुत अच्छी चीज है लेकिन इसे हम थोड़ा समझने की कोशिश करें कि यदि मैं गिनना गणितमाला के माध्यम से आरम्भ से कर रहा हूँ तो इसमें समस्या क्या है? मुझे उसमें गम्भीर अवधारणात्मक समस्या लगती है जिस पर लोग ध्यान नहीं देते।

वास्तविक जीवन में गिनते समय सबसे पहले तो आपको एक समूह अलग करना होता है कि मैं ये चीजें गिनाऊँ और इसके बाहर की नहीं गिनाऊँ। जब आप ये कहते हैं कि इस कमरे में कितने लोग हैं तो आप समूह अलग कर रहे हैं कि कमरे के भीतर के लोगों को गिनना है और बाहर वालों को नहीं। जब आप ये कहते हैं कि तुम्हारे बस्ते में कितनी किताबें हैं तो मैं बस्ते वाली गिनाऊँ जो टेबल पर हैं उनको नहीं गिनाऊँ। तो पहले तो एक समूह निर्धारित करना होता है।

फिर जब आप किसी चीज को गिनते हैं, मान लो मैंने आपको कंचे का ढेर दिया तो उसमें गतिशील ढंग से समूह का विभाजन हो रहा है। आपने एक गिना और उसको अलग खिसकाया, दूसरा, तीसरा गिना और उसे खिसकाया तो यहाँ खिसकाने का तो कोई क्रम नहीं है लेकिन संख्या बोलने का एक क्रम होगा जैसे एक दो, तीन...वगैरह। मैं एक के साथ एक को ही अनुबन्धित करूँगा और फिर आखिर में वो कहीं जाकर खत्म होगा। जब तक मैं ये नहीं करूँगा मुझे गिनती नहीं आएगी।

अब आप गणितमाला को देखिए। बच्चे को समूह पहले से बना के दे दिया गया, उसे खुद नहीं करना पड़ा। क्रम पहले से दे दिया उसको इस तरह गतिशील विभाजन करने की जरूरत नहीं पड़ी और एक समूह की चीजों को दूसरे समूह से मिलाने में बहुत सारी मदद मिल गई। तो ये शायद संख्या ज्ञान सिखाने के लिए उपयुक्त तरीका नहीं है।

लेकिन यही गणितमाला संख्या रेखा पर आने से पहले जोड़ सिखाने में, दस-दस के समूह बनाने में बहुत उपयोगी हो सकती है। तो अभी हम अवधारणा निर्माण की दृष्टि से ये नहीं देखते कि दस का समूहीकरण सिखाने के लिए गिनमाला अधिक उपयोगी होगी या रबर बैंड से तीलियों का बण्डल बाँधना अधिक उपयोगी होगा।

अब हम चमक दमक वाली इतनी सामग्री बना रहे हैं कि सामग्री की जो आधारभूत अवधारणात्मक मजबूती होनी चाहिए उस पर ध्यान दे रहे हैं या नहीं मुझे नहीं पता। तो ये एक असन्तुलन हो रहा है। तो मैंने आपको पाँच बातें बताईं— गणित की प्रकृति को समझना, गणित सीखने में अनुभव और विश्लेषण का रिश्ता, वैचारिक स्पष्टता और भाषा, गणित के अध्यापकों की तैयारी या समझ और अनुभव सामग्री और विश्लेषण या चिन्तन में सन्तुलन। सब जरूरी है लेकिन सन्तुलन के साथ। तो मुझे ऐसा लगता है कि शिक्षाशास्त्र को इन सवालों पर सोचने की दिशा में आगे बढ़ना चाहिए। चूँकि हमारे पास समय कम है तो मैं इन चीजों का केवल नाम ले रहा हूँ मैंने इन पर कई बार कार्यशालाएँ आयोजित की हैं तो वास्तव में इन्हें करने में काफी समय लगता है।

**प्रश्न :** आपने पाठ्यचर्या सम्बन्धी पहलुओं की बात की, स्कूल के ढाँचे से सम्बन्धित पहलुओं की बात की। तो इन शैक्षणिक पहलुओं के अलावा बुनियादी गणित और अंक ज्ञान पर काम करना शुरू करने वाली संस्थाओं को और किन पहलुओं पर ध्यान देना चाहिए?

**उत्तर :** यदि मैं प्राथमिक कक्षा पर ध्यान केन्द्रित करूँ और अपनी अभी तक की बात से हम कुछ ठोस नतीजे निकालें कि हमें कहाँ ध्यान देना चाहिए तो मुझे ऐसा लगता है कि पहले हम

गणित की प्रकृति की बात कर रहे थे अब हमें प्राथमिक कक्षा में संख्या पद्धति और संख्या पद्धति की संरचना पर बात करनी चाहिए। मैंने इस पर भी कार्यशालाएँ की हैं और आप पाएँगे कि संख्या पद्धति की संरचना को अमूर्त में समझने वाले शिक्षक बहुत कम हैं और अगर आप खुद बिना समझे बच्चे को समझाने की कोशिश कर रहे हैं तो एक महत्वपूर्ण बातये है।

मैं इसके विवरण में नहीं जाऊँगा कि संख्या पद्धति के जो मूल सूत्र हैं या जो मूल संरचना है उसमें समूहीकरण वगैरह का क्या महत्व है लेकिन मैं एक टिप्पणी ये करना चाहता हूँ कि अभी जो हम इतना हल्ला मचाते हैं कि स्थानीय मान समझ में नहीं आ रहा तो वो वास्तव में संख्या पद्धति की संरचना न समझने का परिणाम है। तो बुनियादी गणित की बात करने पर ये बातें महत्वपूर्ण हैं।

## अनुभव और संवाद के माध्यम से विश्लेषण के रिश्ते को हमें गणित के शिक्षाशास्त्र में फिर से देखना पड़ेगा।

अगर स्थानीय मान की अवधारणा की बात करें तो इसे समझने के लिए संख्या और अंक के फर्क को समझना जरूरी है और अगर ये फर्क ही स्पष्ट नहीं होगा तो स्थानीय मान की अवधारणा नहीं समझी जा सकती। आप बच्चे को कोई प्रक्रिया सिखा देंगे और उस प्रक्रिया को अपनाकर वो जवाब भी दे देगा। वो मशीनी तरीका है। मुझे स्टेन की एक बात बहुत पसन्द आई। वो कहते हैं कि गणित में बच्चे को इतना अभ्यास तो करना पड़ेगा कि वो 'ऑटोमैटिक' हो जाए और ऑटोमैटिक से उनका आशय यह है कि संज्ञानात्मक संसाधनों के उपयोग के बिना वो झटपट हो रहा है। लेकिन उन्होंने मैकेनिकल और ऑटोमैटिक में भेद किया है।

मैकेनिकल तरीके वाला बच्चा सवालियों को कर तो बहुत जल्दी लेगा लेकिन यदि आप उसे रोककर उससे पूछेंगे कि कैसे किया, इसके पीछे क्या तर्क है तो वो कुछ नहीं बता सकेगा या आपसे ये कहेगा कि किताब में लिखा है या मास्टर ने बताया है। और ऑटोमैटिक स्तर पर वो बच्चा पहुँचेगा जो आपको तर्क भी समझा देगा। हालाँकि उसको इतना अभ्यास हो गया होगा कि जब वो कर रहा होगा तो वो सारे तर्क लगातार नहीं इस्तेमाल करेगा।

इसका एक ठोस उदाहरण लेते हैं— अगर आप गाड़ी चला रहे हैं और ब्रेक लगाते हैं तो ब्रेक लगाते समय आप ये नहीं सोचते कि कोई सामने आ रहा है, मेरी स्पीड तेज है, मैं ब्रेक लगाऊँगा तो गाड़ी धीमी हो जाएगी तो मुझे ब्रेक लगाना चाहिए वरना मैं टकरा जाऊँगा। आप कुछ नहीं सोचते लेकिन अगर कोई आपको रोककर आपसे इतनी जल्दी ब्रेक लगाने का कारण पूछे तो आप ये सभी बातें बता सकेंगे। तो आपका गाड़ी चलाना ऑटोमैटिक हो गया

है, जिसका मैकेनिकल है वो आपको कारण नहीं बता पाएगा। हालाँकि गाड़ी चलाने में ऑटोमैटिक और मैकेनिकल में बहुत ज्यादा फर्क नहीं लेकिन गणित में बहुत फर्क है।

दूसरी जो बात है जिससे बहुत सारे लोग मुझसे असहमत होंगे। जब लोग कहते हैं कि डाटा हैंडलिंग करना अलग से सिखाना चाहिए, इकाइयाँ अलग से सिखाना चाहिए तो हाँ सिखाना चाहिए लेकिन इसमें एक मूलभूत समस्या है जिसे हम नहीं समझ रहे। वो है वास्तविक परिस्थिति को गणितीय दुनिया में परिवर्तित करना और गणितीय दुनिया में गणना करके जो नतीजे आएँ उन्हें फिर से वास्तविकता में बदलना।

असल मुद्दा ये है, जब आप इकाई की बात कर रहे हैं तो आप वास्तव में कुछ परिपाटियों (conventions) का इस्तेमाल करके इकाई को संख्या में बदलते हैं और फिर उस संख्या पर संक्रिया के द्वारा आपको कोई दूसरी संख्या मिलती है जिसे आप पुनः इकाइयों के माध्यम से वास्तविक जीवन में बदलते हैं तो ये अपरिवर्तनीय है। इसे लोग नहीं समझ रहे हैं। लोग इन सबको अलग अलग देखते हैं फिर कहते हैं संख्या सबसे महत्वपूर्ण नहीं है जबकि संख्या महत्वपूर्ण है क्योंकि इससे हमें मात्रा और मात्रा की अवधारणा समझ आती है।

संख्या बहुत महत्वपूर्ण है और यही उसकी ताकत है। यदि आपने ये तरीका सीखा है तो आपको एक फायदा ये हो सकता है कि आपको सभी इकाइयाँ अलग अलग सीखने में बहुत मदद मिल जाएगी क्योंकि मूलभूत सिद्धान्त एक ही है। इसे हम इस तरह से कह सकते हैं, "वास्तविक परिस्थिति की गणितीय अभिव्यक्ति और आपके पास जो समाधान निकले उसे फिर से वास्तविक परिस्थिति में बदलना।"

किताबों, सामग्री और उनके उपयोग को लेकर हम काफी बातें पहले ही कर चुके हैं। मैं इसमें कुछ बातें और जोड़ूँगा। जब आप सामग्री की बात करते हैं तो आपको थोड़ी कल्पना करनी पड़ेगी। पहले हम कुछ अलग किस्म की कल्पना करेंगे फिर गणित पर आएँगे। मान लीजिए कि हम लोग भारतीय उपमहाद्वीप में रह रहे हैं। यहाँ एक खास प्रकार की वनस्पति है, खास प्रकार के प्राणी हैं, जीव हैं, भूभाग है। अब ये मान लीजिए कि श्रीलंका से आगे कोई दूसरा द्वीप है जहाँ सब कुछ भिन्न है। भारतीय उपमहाद्वीप में जीवन कार्बन आधारित है और वहाँ पर जो जीवन है वो सिलिकन आधारित है। मान लीजिए कि आप पुल बनाकर उस महाद्वीप में पहुँच भी जाएँ तो आप वहाँ पर भयानक रूप से असफल साबित होंगे।

अब बात करते हैं गणित की, जब आप ठोस संक्रियाओं और ठोस अनुभव की बात कर रहे होते हैं तो ये एक दुनिया है जो बहुत जरूरी है और यहीं से गणित पैदा होता है लेकिन गणित

की वास्तविक दुनिया अमूर्त, काल्पनिक, निश्चित और आपके दिमाग की कल्पना है, बाहर कुछ नहीं है। अब इस दुनिया में पहुँचने के लिए गणित की प्रयोगशाला जैसे ठोस साधन बनाना पुल बनाने जैसा ही है। पुल से आप वहाँ पहुँच तो जाएँगे लेकिन वहाँ असफल रहेंगे। आपको असल में छलाँग लगाना सीखना पड़ेगा। छलाँग लगाने से मेरा मतलब है कि आप अमूर्त दुनिया में भी उतने ही आनन्द के साथ विचरण कर सकें। छलाँग लगाने के लिए कुछ हद तक तो ठोस साधनों की जरूरत पड़ेगी लेकिन इन पर पूर्ण निर्भरता आपकी छलाँग में बाधक साबित होगी। तो ये जो गैप है इस पर हम और आप कितनी ही बातें कर लें कुछ नहीं होगा, इसे भरना शिक्षक को ही पड़ेगा।

आखिरी बात मैं इसमें ये कहूँगा ट्रिक्स की बजाए तर्क पर बल देना होगा। ये पहला हिस्सा है, फिर इसके लिए शिक्षकों की तैयारी करनी पड़ेगी जिसके लिए हमें गणित की समझ, इसकी प्रकृति की समझ और गणित शिक्षण की समझ के आधार पर गणित का शिक्षाशास्त्र बनाना पड़ेगा। इस दिशा में प्रयास हो रहे हैं। इसे लेकर कुछ सैद्धान्तिक समझ तो है लोगों में। आपने एक सवाल पूछा था कि संस्थाओं के सामने क्या चुनौतियाँ हैं तो उसका मैं जवाब दे देता हूँ। मुझे मोटे तौर पर कुछ चुनौतियाँ दिखाई देती हैं। इस पर और चिन्तन की गुंजाइश है।

तो मैं अपने अनुभव से और लोगों से मेरी जो भी बातचीत हुई है उसके आधार पर कह रहा हूँ कि एक तो ऐसे शिक्षकों की घोर कमी है जो गणित की विषयवस्तु को, इसके तर्क को, उसकी गहराई को समझते हों। हमारे जो शिक्षक शिक्षा पाठ्यक्रम हैं उसमें भी इस समझ को समृद्ध करने वाली चीजें नहीं हैं। तो संस्थाओं के सामने एक बड़ी समस्या यह है। दूसरी समस्या संसाधनों की कमी है। जो भी डोनर संस्थाएँ इन संस्थाओं का सहयोग कर रही हैं उनकी तरफ से उचित सहयोग नहीं मिल रहा है। तीसरी समस्या यह है कि शिक्षण सहायक सामग्री (TLM) के नाम पर हम लोग चमक दमक और प्रचार ज्यादा देखते हैं और बहुत सी गैर सरकारी संस्थाओं में ये ऐसा ही है जिस पर हमें विचार करना चाहिए।

कई चीजें हो सकती हैं जो देखने में उतनी आकर्षक न हों लेकिन अवधारणाओं पर काम करने में बहुत सहायक हों दूसरी ओर कुछ चमकदार चीजें हो सकती हैं जिनसे अवधारणाएँ निर्मित करने में आपको खास मदद न मिल सके। तो मुझे लगता है कि कई बार हम ठोस संसाधनों के पीछे भागते हैं। ये समस्या खासतौर पर गैर सरकारी संस्थाओं से जुड़ी हुई है। हो सकता है मैं इस पर गलत हूँ तो एनजीओ के साथी नाराज न हों।

समस्या यह है कि हम लोगों के दिमाग में नवाचार का एक बहुत बड़ा भूत है। मान लीजिए मुझे कोई विधि आती है और मेरे पास कोई सामग्री है जो बहुत अच्छी तरह मेरी समस्या का समाधान कर रही है मगर इससे मुझे सन्तुष्टि नहीं मिलती क्योंकि मैं कुछ नया करना चाहता हूँ वरना दूसरों को नवाचारी कैसे लगूँगा? और नवाचार के चक्कर में बहुत बार मैं पहले वाले संसाधन से खराब संसाधन बनाता हूँ। तो मुझे लगता है कि ये नवाचारिता का भूत जो है ये बहुत सारी गैर सरकारी संस्थाओं को परेशान करता है। और इसके अलावा गैर सरकारी संस्थाओं के बीच चल रही अनावश्यक प्रतियोगिता भी एक समस्या है। इसकी वजह से वो आपस में सहयोग नहीं कर पातीं।

एक और समस्या जो भारतीय शिक्षा की है वो ये है कि यहाँ बड़ी बड़ी बात करने वाली संस्थाएँ, जो समस्याओं को जल्दी से और सस्ते में सुलझाने का दावा करती हैं, ज्यादा सफल होती हैं। इस देश में ऐसी बहुत सी संस्थाएँ हैं जिन्होंने यह दावा किया था कि एक साल में समस्याएँ हल कर देंगी और अभी तक कोई समस्या हल नहीं हुई है लेकिन उनका काम वैसे ही चल रहा है। ऐसे 25 साल तक भी चले और कोई फायदा न भी हो फिर भी वो वैसे ही चलता रहेगा। तो मुझे लगता है कि गैर सरकारी संस्थाओं के सामने ये कुछ चुनौतियाँ हैं। गैर सरकारी संस्थाएँ और बाकी लोग भी क्षमता वर्धन पर काम नहीं करना चाहते क्योंकि इसमें बहुत मेहनत लगती है। सबको लगता है कि किसी के पास कोई कैप्सूल होगा और जल्दी से हो जाएगा यह सब। अब मैं अपनी बात यहीं समाप्त करता हूँ।

**Email Address:** rohit.dhankar@apu.edu.in



# How to Improve Math Performance for All Learners

## Master Number Concept and Numbersense

*Mahesh C. Sharma*

**W**ith true numberness with decomposition and recomposition as the basis, one can easily learn the arithmetic facts, particularly, addition/subtraction facts. The concept of visual cluster and the decomposition/recomposition is the phonological equivalent of numbersense.

Weaker a child's decomposition/recomposition skill and automatic fact recognition skills, the more the child has to rely on inefficient strategies such as counting. And the compensatory use of inefficient strategies will never entirely make up for weak decoding, and even the most adapt compensator remains at an enormous disadvantage.

Similarly, rote practice of arithmetic facts and procedures is not productive. Practicing a skill over and over in the same way may teach students to acquire the skill. But it won't necessarily lead them to apply that skill to other contexts. Rather, students need to practice the skill in a variety of different ways using efficient strategies to be able to retain, generalize and apply that information.

### **Social and Academic Expectations about Numeracy**

To be fluent in numeracy, one of the components is having good numbersense. One's open, positive, and flexible attitude toward number and the ability to display that flexibility and proficiency in handling quantity is called numbersense. As a skill set, numbersense refers to a person's ability to look at the world quantitatively and make

quantitative and spatial judgements and decisions using mental calculations using the properties of number.

Numbersense consists of a cluster of ideas such as the meaning and ways of representing numbers, relationships among numbers, the relative magnitude of numbers, and proficiency in working with them (ultimately leading to mastering arithmetic facts and their usage). Numbersense is not a set of discrete skills but a set of integrative skills.

### **Strategies and instruction in arithmetic facts and procedures are much more productive when a child has acquired the number concept properly.**

Students with good numbersense can move effortlessly between the real world of numbers and formal numerical expressions. They can represent the same number in multiple ways depending on the context and purpose. In operations with numbers, children with a good sense of number can decompose and recompose numbers with ease and fluency. Technically, it is the integration of (a) number concept, (b) number relationships (arithmetic facts), and (c) place value. Its mastery should reflect age and grade specific expectations, needs, and facility with number. It gets more and more complex and sophisticated as a person encounters new number systems.

For example, at the end of Kindergarten the expected mastery of numbersense is: (a) Number concept, (b) 45 sight facts, and (c) place value of 2-digits. Similarly, mastery of numbersense expected by the end of first grade is: (a) Number concept, (b) 100 Addition facts (sums up to 20), and, (c) Place value of 3-digits. And, numbersense, at the end of fourth grade is (a) number concept, (b) All arithmetic facts (addition, subtraction, multiplication, and division), and, (c) Place value up to the hundredth place.

## Counting is like recognizing and decoding individual letters and their sounds, and recognizing visual clusters for individual numbers is like recognizing phonemes and even words.

Through organized practice and experiences in various forms such as algorithms/procedures, this proficiency and fluency in numbersense is translated into numeracy. Numeracy is a child's ability and facility in arithmetic operations (addition, subtraction, multiplication and division) on whole numbers correctly, consistently, fluently, in multiple forms of procedures, including the standard algorithm with understanding. By the end of fourth grade, a child should have mastered numeracy.

If a student has deficits in it at the end of fourth grade, he needs intervention. That intervention should focus on developing, number concept, arithmetic facts, place value and then numeracy with the proper language, conceptual schemas, strategies based on decomposition/recomposition and place value, multiples procedures appropriate to the context of the problem.

### **Dyscalculia and Acquired Dyscalculia**

There are several reasons for the incidence of specific mathematics learning difficulties

from language related to neuropsychological and cognitive reasons to environmental reasons. However, understanding the development of numbersense provides a window into children's arithmetic difficulties, particularly dyscalculia. Most of the difficulties in mathematics, particularly, arithmetic emanate from the difficulties in learning of number related difficulties.

Dyscalculia is a child's difficulty in conceptualizing and using number, mastering number relationships, and producing outcomes of number operations. The difficulty with numbersense may be the result of a child's assets (or lack thereof)—neurological, neuropsychological, and cognitive reasons, and/or environmental factors—poor teaching, poor curriculum, or lower expectations. When these difficulties exist in spite of a child having intact neurological, neuropsychological, or other cognitive factors, then it is purely because of environmental factors and this will be termed as acquired dyscalculia.

Dyscalculia or acquired dyscalculia, thus are the manifestation of difficulties in the integration of number concept, numbersense, and numeracy. However, just like effective teaching methods for reading can mitigate the impact of dyslexia, similarly, one can have dyscalculia or acquired dyscalculia. But effective and efficient teaching methods can give students skills so that the effects of dyscalculia and acquired dyscalculia (and other specific mathematics difficulties) are minimized or mitigated.

Dyscalculia is a quantity/number (with some overlap of spatial orientation/space organization) based disorder, so the intervention and remedial programs should focus on the development of number concept, numbersense, and numeracy. That means, the interventions and remedial instruction for children with learning disabilities (including dyscalculics) initially should focus on the mastery of number

concept—visual clustering, decomposition/recomposition, and acquiring the sight facts.

To design effective methods, understanding the definitions and characteristics of dyscalculia is critical. For example, children, especially gifted children, may be able to compensate for even massive deficits using one or more of their equally massive strengths.

A child with tremendous memory and fantastic oral comprehension might be able to get around abysmal arithmetic fact fluency for a while to produce an adequate arithmetic result when mathematics is still fairly simple.

But if they have deficits in the understanding, fluency and applicability of number concept and numbersense and procedures, they will have difficulty in future mathematics. Similarly, a child with using counting methods may be able to do well on tests and exams, in the early grades. But she will have difficulties later on.

Unfortunately, many school personnel often get this wrong as their own understanding of dyscalculia and arithmetic disability may be limited affecting resources available for such in quantity and quality. This is compounded by the inadequate preparation of special education teachers in mathematics and mathematics learning disabilities, particularly dyscalculia compounding the environmental factors related to dyscalculia.

Many parents and school personnel mistakenly assume that dyscalculia equates to permanent condition of deficit or disability. True number concept is at the basis of the development of fluent numbersense. Therefore, the condition of dyscalculia and acquired dyscalculia can be compounded without proper teaching of number concept.

It is very difficult to master (understanding, fluency and the ability to apply), arithmetic facts and procedures without proper number concept teaching.

### Catch Them Before They Fall

Early identification and assessment of number concept and numbersense are essential to prevent numeracy failure in young children and avoiding future mathematics difficulties. Students without adequate mastery of sight facts and decomposition/recomposition early, continue to demonstrate poor numbersense and numeracy skills, even into the middle grades and high school.

There is a strong predictive validity to early number concept (particularly decomposition/recomposition) and later mathematics achievement. The contribution of sight facts and decomposition/recomposition role does not diminish. Children continue to use the number concept and decomposition/recomposition whenever they encounter numeracy problems. For example, when students encounter work on fractions, integers and rational numbers, they continue to need and use them for new number relationships.

**The key element is the constant and intense practice in phonemic awareness that helps students to connect graphemes and phonemes.**

Research in reading processes indicates that certain domain-specific deficits such as measures of a child's phonemic awareness and phonological sensitivity are the best predictors of early reading performance (better than IQ tests, readiness scores, or socioeconomic level). It is widely accepted that deficits in phonological processing are the proximal cause of Reading Disability (RD) (Vellutino, Fletcher, Snowling, & Scanlon, 2004)).

Similarly, a domain-specific deficit in processing numerosities (numberness) has

been implicated in mathematics disabilities (MD), such as dyscalculia (Butterworth, 2010; Wilson & Dehaene, 2007). And of the several sub-skills of numberness the most important skill involved as a deficit is decomposition/recomposition.

In addition, domain-general cognitive risk factors, such as slow processing speed and working memory might be shared between the two disorders and could possibly explain why they may co-occur. Research shows that almost 40% of dyslexics also exhibit symptoms of dyscalculia.

This comorbidity between RD and MD indicates that there is fundamental components in both of them that implicate. These are phonemic awareness and decomposition/recomposition, respectively. We have observed, with hundreds of children, that fluent numberness (integration of one-to-one correspondence with sequencing, visual clustering, and decomposition/recomposition) is a better predictor of future proficiency and fluency in arithmetic and even higher mathematics. Remediation of numberness related key skills results in better understanding and mastery of numeracy.

## Early identification and assessment of number concept and numbersense are essential to prevent numeracy failure in young children and avoiding future mathematics difficulties.

On the other hand, high comorbidity rates between reading disorder (RD) and mathematics disorder (MD) indicate that, although the cognitive core deficits underlying these disorders are distinct, additional domain-general risk factors might be shared between the disorders.

Three domain-general cognitive abilities processing speed, temporal processing, and working memory are studied in RD and MD. Since attention problems frequently cooccur with learning disorders, the three factors associated with attention problems account for the comorbidity between these disorders. However, the attention problems observed in the case of MD, some of them are secondary in the same sense, that they might be the byproduct of consistent failure in mathematics.

Research on measures of processing speed, temporal processing, and memory with primary school children with RD, children with MD, children with both disorders (RD+MD), and typically developing children (TD controls) show that all three risk factors are associated with poor attention.

After controlling for attention, associations with RD and MD differed. Although deficits in verbal memory were associated with both RD and MD, reduced processing speed was related to RD, but not MD. The association with RD was restricted to processing speed for familiar nameable symbols.

In contrast, impairments in temporal processing and visuospatial memory were associated with MD, but not RD. Visuospatial memory is essential for visual clustering, decomposition/recomposition, and therefore with development of sight facts.

### Interventions and Remedial Strategies for Dyscalculia

To help LD students, particularly poor readers, become fluent readers, few key components are typically involved. These include: (a) constantly increasing sight vocabulary; (b) sustained, systematic work on phonics and phonological sensitivity as a means to 'breaking the code' and build proficiency by focusing on phonemic awareness; and (c) repeated readings using efficient strategies for blending sounds to build fluency.

The key element is the constant and intense practice in phonemic awareness that helps students to connect graphemes and phonemes. This process helps children to move from decoding of individual letters to chunking and blending sounds. This insight helps interrupt the cycle of failure for poor readers.

## Dyscalculia is a child's difficulty in conceptualizing and using number, mastering number relationships, and producing outcomes of number operations.

Many planners of mathematics instruction for young children often do not fully take into account that to increase proficiency, competence, and fluency with basic addition and subtraction facts, children need to develop solid number concept (numberness) and flexible numbersense. They stop short: as soon as children are able to count one-to-one, they assume the child has the concept of number. Sequential counting and one-to-one correspondence, even when it is converted into conservation of number is not enough for competence in numbersense.

For example, explicit teaching of phonemic awareness skills and sound blending skills is important, but instruction that integrates 'in how to blend phonemes together' and also how to 'pull apart' or 'segment words into phonemes' is more useful to students in order to acquire reading skills. The organized and intense supervised practice in building sight vocabulary, "pulling apart" and "blend it together" converts novices into fluent readers.

Similarly, learning sequential counting, one-to-one correspondence, visual clustering, building sight facts, and decomposition/recomposition in isolation are useful to an

extent, but what is even more important and productive is instruction that focuses on their integration. An organized and early intensive supervised practice in the integration of these component skills develops true number concept (numberness) and then aids in the optimal development of numbersense.

When one hears or sees a number, one does not see discrete objects; instead, one sees or hears a collection represented in its abstract symbolic form. Children can count objects one-by-one, but they have difficulty recognizing visual clusters of objects as represented by specific numbers. Counting is like recognizing and decoding individual letters and their sounds, and recognizing visual clusters for individual numbers is like recognizing phonemes and even words.

Decoding individual letters does not make a child a fluent reader. For proficiency and fluency in reading with comprehension, one needs grapheme-phoneme connection and practice in blending sounds. Similarly, counting does not make a child fluent in numberness or numbersense. One has to blend numberness of two numbers (sight and addition facts) to produce new numbers. Arithmetic facts (blending of two numbers) and place value (blending of two or more numbers) are like identifying the phonemes in a big word and then blending of those sounds in reading that word.

Weaknesses in phoneme awareness, rapid automatized naming and working memory are strong and persistent correlates of literacy problems, particularly spelling, even in adults. Similarly, decomposition/recomposition, working memory, and rapid automatized naming are related to addition and subtraction facts and then with multiplication and division facts.

Strategies and instruction in arithmetic facts and procedures are much more productive when a child has acquired the number concept properly. Further, true number concept and decomposition/recomposition is

the basis of deriving addition and subtraction strategies [Making ten,  $N + 9$  (add  $10 - 1$ ),  $N + N$  (doubles),  $N + (N + 1)$  (doubles plus 1),  $N + (N - 1)$  (doubles minus 1),  $N + 2$  (2 more),  $(N + 1) + (N - 1)$  (2 apart)]. Mastery of arithmetic facts, thus, is dependent on number concept, decomposition/recomposition, and strategies based on these.

For example,  $8 + 6 = 8 + 2 + 4$  (applying the knowledge that we need 2 to make 10 and 6 is decomposed into  $2 + 4$ ) =  $10 + 4$  (8 and 2 are recomposed into 10 and with the knowledge of teen's numbers —place value to get 14), or  $8 + 6 = (7 + 1) + 6 = 7 + 7 = 14$ , or  $8 + 6 = 2 + 6 + 6 = 2 + 12 = 14$ , or  $8 + 6 = 8 + 8 - 2 = 16 - 2 = 14$ . All of these strategies are built on sight facts, making ten, and decomposition/recomposition.

As phonemic awareness is to reading, decomposition/recomposition is to numbersense and numeracy. The reading research demonstrates phonemic awareness (PA) is one of the biggest building block of the reading success, and decomposition/recomposition process is the building block to mathematics. And, PA should not be abandoned until the child has demonstrated advanced levels of PA skills. However, decomposition/recomposition, as a process, is present in mathematics at all levels. It is never abandoned.

A skilled reader is able to read almost every word without activating the phonological processor. Fluent reader reaches that point because she did use the phonological processor which allowed her to make words automatic. There is a real difference between a beginning reader and a fluent reader. Looking at a cluster of objects (up to ten) and recognizing it and giving it a numerical name, instantly, is the goal, but to get there we need to focus on recognizing smaller clusters and even some counting.

As in reading a word, we do not focus on each letter, nor we begin with the whole word memorization, similarly, in numberness, we

neither focus on one object at a time nor on the whole cluster to start with.

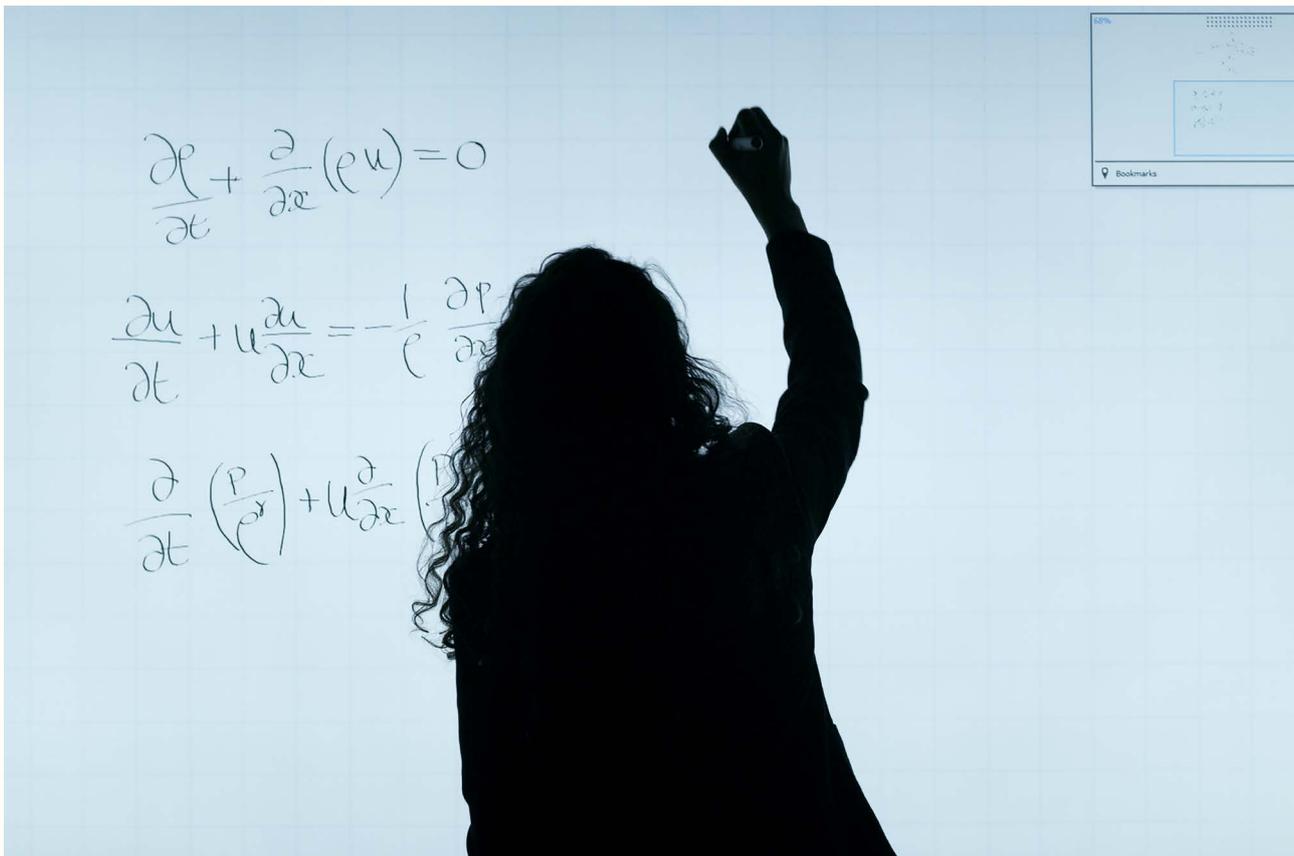
**Number sense is not a set of discrete skills but a set of integrative skills. Students with good number sense can move effortlessly between the real world of numbers and formal numerical expressions.**

Thus, the acquisition of number concept and then acquiring arithmetic facts, at one level, is similar to learning to read. One acquires the meaning of symbols, decodes the symbols and then combines the symbols to relate to other symbols. In reading, it is the process of associating phonemes to grapheme and vice-versa and the blending of sounds.

When a child encounters a new word, she breaks the word into 'chunks' and then 'blends' these chunks into the word. This chunking and blending is the manifestation of the integration of grapheme-phoneme relationship. A child cannot become a fluent reader without being fluent in grapheme-phoneme association and the process of 'chunking' and 'blending'.

The parallel process in mathematics is also three-fold: (a) instantly associating a visual cluster with its number representation, (b) associating a sound with number, and (c) decomposition and recomposition. The recognition of a visual cluster and decomposing a cluster into its subclusters and combining sub-clusters into a larger cluster and instantly recognizing the larger cluster as the combination of the sub-clusters are the key processes to acquiring the number concept and numbersense.

In most situations, in teaching number, teachers help children acquire the concept of number by connecting the phoneme (sound



s-e-v-e-n) with grapheme (symbol 7). But that is not enough because acquiring numberness is more than learning to read a number or even count. This causes the manifestation of the symptoms of dyscalculia and acquired dyscalculia in most children.

**Thus, the acquisition of number concept and then acquiring arithmetic facts, at one level, is similar to learning to read.**

In teaching letters, there are two schools/traditions. In England, the sound of letters are taught first and then the letters, in most American schools, the letters first and then their sounds. In reading research, there is higher correlation between sound/letter to reading than letter/sound relationship. There is great deal of evidence that both are important.

Similarly, in the United States, the number names are taught first and then the numerosity associated with them. In contrast, in Asia and England, it is the numerosity first and then the number shapes. Both are essential for learning number concept. However, when numerosity and oral representation are learnt before the writing of numbers, children develop number concept faster. The judicious integration of the two expedites the process.

**Mahesh Sharma** is the former President and Professor of Mathematics Education at Cambridge College where he taught mathematics and mathematics education for more than thirty five years to undergraduate and graduate students. He is internationally known for his groundbreaking work in mathematics learning problems, particularly dyscalculia.

**Email Address:** mahesh@mathematicsforall.org

# Learning and Teaching of Algebra Through Tasks That Encourage Algebraic Thinking

*Aaloka Kanhere*

**M**ost of us who have worked with middle-school children would agree that algebra is one subject which children find difficult to understand. What makes matters worse is that it is also a subject which is used extensively in higher classes across subjects. Several domains like computer science and engineering use algebra for their development. Algebra is very important while working with natural sciences like physics, chemistry and biology. It is also an essential tool to understand the world we live in better. Many questions about the environment and economics can be understood better with the knowledge of algebra.

For many people, the word algebra would bring back memories of alphabets like x, y, and z. But a lot of algebra can be done in primary school and middle school. Can you believe it if I say that in lower classes one can engage with algebraic problems which do not include the dreaded words, “Solve for x?”

Let us begin the discussion with the question, “What is Algebra?”

For a lot of mathematics educators, algebra is not just a subject but a way of thinking. They say that the purpose of algebra in elementary school is to develop ‘algebraic thinking’.

What is algebraic thinking? And what is not algebraic thinking?

Let us look at a simple example. The following question is asked in a classroom.

$$193 + 288 = \square + 287$$

One student’s answer is as follows: “ $193 + 288 = 481$  and  $481 - 287 = 194$ . So the answer is 194.”

Another child’s answer is this: “On the left side I have 288, and on the right I have 287. 287 is one less than 288. So for the two sides to be equal, the number in the box has to be 194, which is one more than 193.”

According to you, what is the difference between these two answers?

In the case of the first student, he has looked at the numbers individually and solved both the sides separately and then equated them. But the second student has not only looked at the numbers but also the relationship between them.

What is the advantage of one over the other? Let us see what happens when one used larger number like,

$$2793 + 3478 = \square + 3477$$

In this case, the first student would have to first add  $2793 + 3478$  to get 6271 and then subtract 3477 from 6271 to get 2794, which is a lot more tedious process than the first problem.

But for the second student, the solution does not change much because she has looked at the structure of the problem instead of just the numbers. If we review the two solutions we would find out that the first student is only working with numbers while the second student is also looking at the structure. This process of looking at the structure instead of just the numbers can be called ‘algebraic thinking’.

If one looks at the second student's answer, one can see that she has found what we can call as a generalised solution to the problem. In the language of algebra, the number sentence looks something like this:

$$a + b = \square + (b - x)$$

And she solves it like this,

$$a + b = (a + x) + (b - x)$$

So, we can see that without actually using letters like a, b or x, this student has already started doing algebra.

Let me share my experience of doing number-sentences.

We started doing these exercises with students in a vacation camp. The objective of the vacation camp was to explore students' algebraic reasoning when exposed to algebraic ideas through tasks like number-sentences and pattern generalisation.

Some of the initial number-sentences we gave them were something like this -

$$3 + 8 = \square + 9$$

$$15 + 29 = 20 + \square$$

$$17 + 6 = \square + 4$$

$$52 + 13 = 12 + \square$$

All the students chose to solve these problems like the way the first student did, i.e., '3 + 8 = 11 and 11 - 9 = 2 so the answer is 2.'

All the teachers, including me, tried in various ways to encourage the students to see the structure of the number-sentences. But the students continued to solve these number-sentences in the method shown above. As one of our attempts to encourage them to look at the structure of the number-sentences, we gave them similar problems but with large numbers like four-digit numbers. Suddenly most of them started solving it like the way the second student did, i.e. algebraically.

Some students may naturally think algebraically. But being able to think algebraically is not just a 'talent' that a child has but a 'skill' a child acquires when she needs it. We as teachers can create situations or develop problems such that she gets encouraged to develop this type of thinking.

Once the students started looking at structure, they went on to generalising these number-sentences in various ways. One of the ways was the following.

Student: "All these statements will be always true."

$$a + b = (a + \square) + (b - \square)$$

Teacher: "What are a and b and what is the box?"

Student: "a and b hold the same value on either side of equal to and the box refers to the same number in a number sentence."

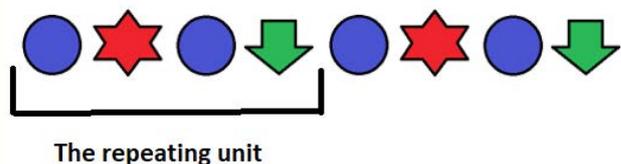
Number-sentences can be very important tools to work with students even in lower classes, even before 'formal' algebra comes in.

Like number-sentences, another tool that is very useful in encouraging algebraic thinking or reasoning in students is that of patterns.

There are different types of patterns we can use in our classrooms. Let us look at some of them.

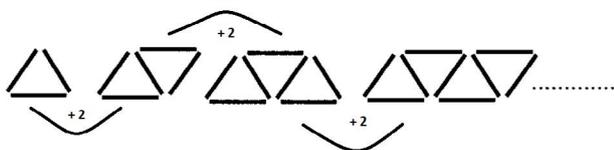
1) Repeating Patterns: In these patterns there is an identifiable unit that repeats.

Some standard examples of repeating patterns are 123123123....where 123 is the repeating unit. Another example of repeating patterns can be a combination of shapes.



2) Growing Patterns: These patterns are characterized by how one element relates to the next one. These patterns increase or decrease by a constant difference.

1,3,7,... or 1, -4, -10, .... or

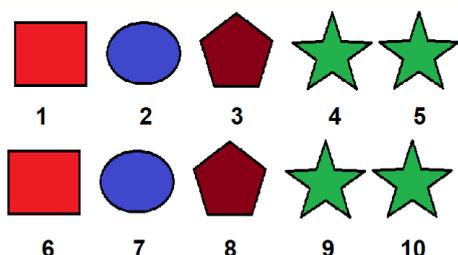


3) Recursive Patterns: In these patterns the relationship between the terms defines the pattern. The famous Fibonacci numbers 1, 1, 2, 3, .... or the minimum steps required in the Tower of Hanoi problems 1, 3, 7, ... are examples of recursive patterns.

The position paper on ‘Teaching of Mathematics’ in NCF 2005, emphasizes the role of patterns in elementary school algebra and the role they play in higher classes - “The identification of patterns is central to mathematics. Starting with simple patterns of repeating shapes, the child can move on to more complex patterns involving shapes as well as numbers. This lays the base for a mode of thinking that can be called algebraic. A primary curriculum that is rich in such activities can arguably make the transition to algebra easier in the middle grades.”

These patterns can offer opportunities to students for generalizations and for developing algebraic reasoning. Let us look at some questions which can be asked in the context of patterns to encourage algebraic reasoning. Let us also look at two sets of questions and study their role in encouraging algebraic thinking.

Let us look at an example of repeating patterns.



Set 1
Which shape will be there in the 12 <sup>th</sup> position?
If the pattern continues, how many stars will be there by the 15 <sup>th</sup> position?
Set 2
Which shape will be there in the 112 <sup>th</sup> position?
If the pattern continues, describe all the positions where you will get stars?

Please do answer the above questions before proceeding.

In Set 1, one can always find the answers by just writing the patterns till the 12<sup>th</sup> or the 15<sup>th</sup> position.

So, without having to actual look at the pattern and understand it one can answer the questions in Set 1. In contrast to that, for Set 2, writing the pattern till 112 can be tedious. And that might encourage the students to look at the pattern and generalize it.

If we look at the pattern carefully, we find that the repeating block is of 5 shapes. Hence, the shapes repeat after every 5 shapes. That is, the shape at the 1<sup>st</sup> position will be the same as the shape at the 6<sup>th</sup> position, which will be same as the shape at the 11<sup>th</sup> position or 106<sup>th</sup> position.

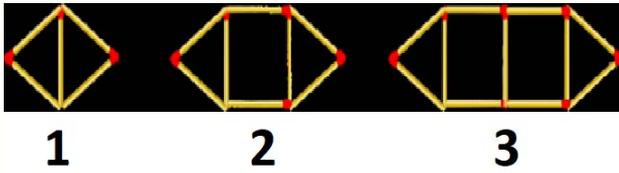
Similarly, while answering the second question in Set 2, one finds out that the 4<sup>th</sup> and the 5<sup>th</sup> positions will have the star. This means that at every 5<sup>th</sup> shape after the 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> positions there will be a star. What do you think is a better way of describing this?

While doing this pattern with some students, one student gave me a very interesting answer. I am quoting his answer, “Every position which ends with 1 or 6 will have a red rectangle, every position ending with 2 or 7 will have a blue circle, every position ending with 3 or 8 will have a brown pentagon and every position ending with 4, 5, 9 or 0 will have a star.”

Do check out what whether his answer is correct and also try to find out how he came to his answer?

After repeating patterns let us look at some examples of growing patterns.

Study the pattern given below and complete the following table:



Design	Number of sticks used
1	5
2	8
3	11
4	
5	

Design	Number of sticks used
15	
20	
25	
75	
$n$	

When this question was asked to Class 5 students, these were some of the answers they gave for the last column.

- $3 + 2 + 3(n - 1)$
- $2 + 3n$
- $3(n + 1) - 1$

One aspect of working with patterns is generalising and the other aspect is justifying your answer.

All the three answers give a generalized form for the given pattern. Try to find the justification for the first two answers given by the students.

Let us look at the third one and try to understand the student's justification.

Student: "To solve this problem, I added a matchstick to each of the designs. So, the new pattern looked like this. Then I counted

the matchsticks for every design. And I found that at every stage the number of matchsticks was  $3 \times (\text{design number} + 1)$  i.e.  $3(n+1)$ . But then I had added one matchstick for every design so I need to remove that. So, the number of matchsticks in every design is  $3(n + 1) - 1$ ."

This strategy of manipulating patterns was not discussed in the class but the students discovered this technique herself.

Another interesting discussion that followed this pattern was discussing why the three forms given below are the same.

- $3 + 2 + 3(n - 1)$
- $2 + 3n$
- $3(n + 1) - 1$

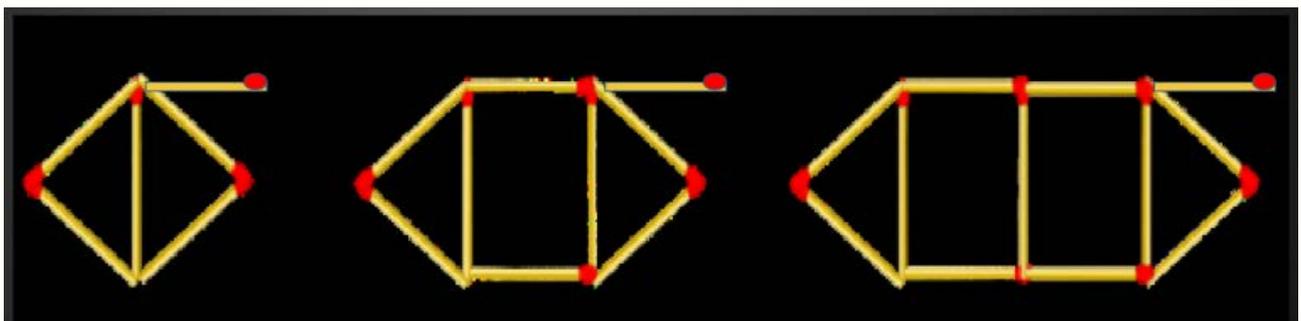
This discussion gave the teacher an opportunity to talk about rules of opening brackets and algebraic manipulation.

In this article we saw some situations which can give teachers opportunities to encourage students to think algebraically and help create situations in the classroom which can develop students' algebraic thinking skills.

There are a lot of more tasks which will help in developing algebraic reasoning among students. Please do look at the resources mentioned at the end of this article for more such tasks.

Some sample tasks:

<https://drive.google.com/file/d/16BwjWtozvyesLaVyVT20Qj5Bm5YUCu49/view?usp=sharing>



## References and Useful Readings

National Council for Education, Research and Training, 2006. Position Paper on Teaching of Mathematics by the National Focus Group, National Curriculum Framework – 2005. (Retrieved from [http://www.ncert.nic.in/html/focus\\_group.htm](http://www.ncert.nic.in/html/focus_group.htm))

Takker, S., Kanhere, A., Naik, S., & Subramaniam, K. (2012, October). From Relational Reasoning to Generalisation Through Number Sentence Tasks. In *epiSTEME 5*.

<http://episteme.hbcse.tifr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/view/162/36>

Three Components of Algebraic Thinking: Generalization, Equality, Unknown Quantities

[http://courses.edtechleaders.org/documents/elemalgebra/rubin\\_diffalgebra.pdf](http://courses.edtechleaders.org/documents/elemalgebra/rubin_diffalgebra.pdf)

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.

<https://people.math.wisc.edu/~kwon/135Spring2014/alg.pdf>

**Aaloka Kanhere** is a mathematics educator. Currently, she is a freelancer but has been associated with the Homi Bhabha Center for Science Education, Mumbai and Eklavya Foundation, Madhya Pradesh, in the past.

**Email Address:** [alokakanhere@gmail.com](mailto:alokakanhere@gmail.com)

The image displays a collection of mathematical derivations and formulas. On the left side, there are trigonometric identities such as  $\sin\left(3t_2 + \frac{\pi}{6}\right) = A \sin\left(3t_2 + \frac{\pi}{6}\right)$  and  $E_p = E_{p_{\max}} \Rightarrow \sin^2\left(3t_p + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ . It also shows algebraic manipulations like  $y * z = \left[\frac{1}{2}(x + y - xy + 1)\right] * z = \dots$  and  $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$ . On the right side, there are physics-related formulas, including  $t_1 \approx \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{9,8}} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} = 3$ ,  $I_R = \frac{U}{R} = \frac{220}{17,32} = 12,7 \text{ A}$ , and  $\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{X_L}{\omega} C}}$ . The bottom right section contains more complex derivations involving  $I = \sqrt{1+x^2} - \ln \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} + C$  and  $-Q_{41} = \nu C T_1(1 - \epsilon^{1/2}) + \nu C_V T_1(\mathcal{K} - 1)$ .

# Useful Math Resources

Josephdeyone Jacobi

Here we share with you materials that are potentially useful to plan and deliver mathematics classes in primary sections of schools and learning centers. You'll also find in these resources ideas to plan teaching different topics related to math to children.

## 1. Addition

[AtRiA Pullout Section July 2013 | Teachers of India](#)

## 2. Subtraction

[Pullout Section November 2013 - Teaching Subtraction | Teachers of India](#)

## 3. Multiplication

[Pullout Section March 2014 - Teaching Multiplication | Teachers of India](#)

## 4. Division

[Pullout Section July 2014 - Division | Teachers of India](#)

## 5. Fractions

[AtRiA Pullout Section June 2012 | Teachers of India](#)

[AtRiA Pullout Section December 2012 | Teachers of India](#)

## 6. Geometry

[Pullout Section November 2014 - Geometry | Teachers of India](#)

[Pullout Section March 2015 - Geometry II | Teachers of India](#)

## 7. Worksheets.

Worksheets which can be used for free.

[Math Worksheets / FREE Printable Worksheets – Worksheetfun](#)

## 8. Online tools

Khan Academy has a very useful set of videos and exercises for Indian curriculum It is available in Hindi as well.

[Math - Indian curriculum | Khan Academy](#)

To practice multiplication facts

[Multiplication by Heart – Mathigon](#)

9. **Ganit Mala Beads** is an amazing tool to build number sense among students. Jodo Gyan has worked extensively and developed highly useful resources.

[Activity resources / Primary / Ganit Rack | Jodogyan](#)

[Activity resources / Primary / Ganitmala | Jodogyan](#)

10. Create a lot of meaningful counting activities for the students in class. Here is an example from JodoGyan

[Activity resources / Primary / Rangometry | Jodogyan](#)

**Josephdeyone Jacobi** is a K-12 math educator who loves to facilitate math learning for students, teachers and parents. He works with Gubbachi Learning Community and Math Box.

**Email Address:** josephdeyone.jacobi@apu.edu.in



# Demystifying Mathematics

## Finding Joy in Numbers

*Aastha Maggu*

In our education system the teaching and learning of mathematics, is more often than not, abstract and procedural. Students seldom gain conceptual clarity. The fear of math is accentuated by notions like it is alright to not be good at the subject or it is not useful in life. In this article, we discuss the experiences, approaches, and struggles of organizations working on improving mathematics education in India, and the various techniques and materials they use to make learning math joyful for children.

### **Aavishkaar – Palampur**

Aavishkaar is one such organization. The Aavishkaar team is aware that students, struggle to understand the fundamentals of mathematics. Sandhya Gupta, co-founder of Aavishkaar shared that their work focuses on facilitating educators and young learners to adopt a creative, curious, and critical thinking approach to education as the present system does little to hone children’s curiosity and fails to provide them with safe spaces to make mistakes and learn.

They use teaching-learning materials and techniques that make learning math a visual, relevant, contextual, and engaging experience. They work in the public schools of Himachal Pradesh, Telangana, and Assam. They also closely collaborate with grassroots organizations across the country. The Aavishkaar team conducts training courses for teachers who are capacitated with the required knowledge, skills, and mindset.

Aavishkaar runs a learning center for students from first to tenth grades in Palampur. They also frequently hold online

and residential camps for students where they deep-dive into particular themes. The team uses a framework that helps children participate in sessions and critically engage with concepts. Their five-step framework includes introducing the concept in a fun activity, working on a problem in groups and arriving at solutions, discussing their selection in the class, engaging on extensions of the problem, and finally reflecting on the essence of the concept.

The team begins each session with what they call ‘Ganit Charchaa’, where they generate a discussion in the classroom. The aim of this introductory activity is to encourage children to participate in the lesson without any inhibitions and reinforce that there can be numerous ways of solving a problem. Sandhya shares, “For instance, in ‘Ganit Charchaa’, the activity can be asking children to count certain items arranged in an order. The children use different ways to arrive at the total number of items. Children count the items by grouping them into different shapes such as a triangle, square, etc. This exercise allows children to arrive at the solution using their own rationales. Activities like



Aavishkaar Palampur

these instill confidence amongst children as they realize that there are varied ways to look at something. Children also learn to acknowledge and respect each other's opinions."

Dispelling notions of fear against, or inability to enjoy, mathematics is consciously undertaken by Aavishkaar's educators. They have observed that children and teachers both share this uneasiness. The educators are encouraged to discuss experiences of mathematicians that drive home the point that learning math the right way can be fun.

Aavishkaar's educators often explore a real-life problem in small groups. For instance, to explain linear equations, children can be given a problem in which a local shopkeeper has to procure a particular item such as pens from a wholesaler. The wholesalers charge different costs for the item and are located at varying distances. Questions such as which is the best deal, writing a general equation for finding the cost of procuring that item, representing the deals on a graph, etc. are then posed to the children.

Children work in groups to answer certain questions. They are later requested to explain the rationale behind their solutions to the larger group and they are nudged by the facilitators to use mathematical reasoning to arrive at those answers. Teachers are encouraged to discuss extensions of the problems raised by students in the session and some that they themselves deem to be relevant. The students are then made to reflect on the essence of the concept through individual and group discussions.

Sandhya added, "These children tell us that since the educators allow them to make mistakes and not scold them for it, they enjoy participating in the sessions. We need to make them feel safe in a classroom and the progress they show will be remarkable." The Aavishkaar team hopes to reignite curiosity and passion for mathematics in each child.

## Palakneeti Parivar

Palakneeti Parivar was set up in 1996. It works on social parenting and providing holistic education to children living in a slum of Pune. Khelghar is a project started by Palakneeti Parivar with the aim of reaching out to the underprivileged. There are about two hundred children from the Laxminagar slum of Kothrud in Pune participating in the activities at Palakneeti's learning centers. The parents of these children work at construction sites. They hail from areas facing droughts in Maharashtra, and from neighboring states of Karnataka, Telangana and Andhra Pradesh.

These children do not get the required learning support in their schools or families. The Palakneeti team, through play-based



Palakneeti Parivaar

activities, attempts to correlate conceptual learning with the experiences of these children. Their focus is on increasing children's proficiency in mathematics, Marathi and life skills. Based on the grades they are in, and their learning levels, children are divided into eight groups. They have two hours of sessions daily at the learning centers run by the team. The focus remains to engage closely with children in primary grades.

Sumitra Marathe, who leads the mathematics program at Khelghar, along with two other volunteers, shared that the children often

find the math taught in class to be crude. She added, “We try to dispel these fears about mathematics by making the children understand the foundational concepts and visualize their lessons. Our two-step pedagogy learnt from Navnirmiti involves using objects to introduce concepts. Then we continue to help them understand the numbers and symbols. The problem is that children can count the numbers from one to two hundred but when you say twenty-three then they do not understand what twenty-three means. We give them sticks or some pebbles or pseudo currency notes and ask them to represent twenty-three objects.”

Using games to make children understand concepts makes the learning experience joyful for children. The team uses a lot of tools to break down, what may seem as, complex concepts for children. They organize games around shopping where children are given objects and then asked to add or subtract based on the prices and quantity of each object. They have three by three meters snakes and ladders games printed, where the children play using mathematical operations. Sumitra adds, “It is heartening to see the children enjoy these games. They can play them for hours. We simultaneously ensure that they are able to relate these activities with the operations taught at school.”

The team also uses calendars as a tool to teach children. They are inspired by the work of Arvind Gupta, an educator who has worked on using toys to teach science and math to children. In his [videos](#), he shows how the calendar with just numbers one to thirty can be innovatively used for improving children’s understanding.

The team, through the usage of relevant materials, ensures that children visualize what they are learning. They use dotted sheets and notebooks with squares in them and tell children to visually perform each operation. For instance, if three and two need

to be added, then children would be asked to represent these with distinct colors and their sum in another color.

To introduce concepts related to measurement to children, the team asked children to map all the taps and the broken taps near their homes. The children were asked to calculate how much water might be available in all the taps and how much water must be wasted in one minute through the taps that were leaking. The older children went ahead to repair the taps that were leaking. The Palakneeti Parivaar team understands that children’s learning abilities vary across groups, and they provide three levels of worksheets.

The education system fails to provide adequate time and appropriate methods to students to learn the foundations of mathematics. Working with a pedagogy that incorporates games and activities to strengthen math concepts, the Palakneeti Parivaar team believes that each child can rediscover the joy of learning mathematics.

## **Better Education Lifestyle and Environment Foundation**

Better Education Lifestyle and Environment Foundation (BELIEF) is a non-profit based in Pune city that works to address issues in education, health, and the environment by creating replicable models of sustainable development by providing services and capacity enhancement of relevant stakeholders.



With the vision of improving primary and elementary education, BELIEF has initiated its Early Childhood Education (ECE) program with fifty-four anganwadis in Pune. The families in the area have migrated from drought-stricken regions of Maharashtra - Latur, Solapur, Marathwada and Western Maharashtra - and the surrounding states of Karnataka, Telangana, and Andhra Pradesh. They work in the vicinity of construction sites.

**Most of the stakeholders in our education system including educators, policy makers, and parents have been taught mathematics using mechanical processes that have had limited real-life applications.**

In ECE, anganwadis play a pivotal role in delivering pre-school education to children aged three to six years. Anganwadis are pre-school centers running across the country under the Integrated Child Development Scheme (ICDS). The workers at these centers are also tasked with collaborating with other stakeholders such as Accredited Social Health Activists (ASHA), and Auxiliary Nurse Midwife (ANM), among others, to monitor and support the health and nutrition of children and expecting and lactating mothers.

The anganwadi workers are responsible for various services such as immunization, delivering supplementary nutrition and supporting other services. Inadequate handholding and contextual training to anganwadi workers on ECE and lack of support from parents results in compromised learning experiences of young children.

The BELIEF team tries to overcome gaps in implementation by envisioning the institutionalization of change. Atul from

the team says, “We believe in bringing in sustainable change by strengthening the system. The role of each stakeholder becomes especially important in this context. For instance, in the case of ECE, we believe that everyone, from Child Development Project Officer (CDPO) to parents, should have a basic orientation of ECE. Presently, the team has prioritized working with Anganwadi workers and parents.”

They conduct training for anganwadi workers every fortnight. These two-hour-long sessions expose the participants to appropriate pedagogy and teaching-learning materials suited for young children. They initially focused on perspective-building where the workers were made to understand their role, its importance in the development of children, etc. After every four to five months, BELIEF conducts in-person training for them as well. The workers remain connected through a WhatsApp group.

The BELIEF team extensively uses teaching learning materials for children as they believe that these materials enrich their learning experience. To understand how to identify which object is greater in number, the team told workers to place three books and five pencils in front of children and request them to tell them the object that is greater in number.

Some children end up responding that books are more than pencils as they tend to get confused between two criteria of comparing area and number of objects. The workers are then asked to count the two items together (applying one-to-one correspondence) to help children understand which object is greater in quantity.

Archana from the BELIEF team, who conducts training for anganwadi workers, shared that the material need not be expensive and anything readily available can be used for creating learning opportunities for children. For instance, to help children

learn about patterns, the team suggested that the workers identify patterns in their surroundings using objects such as leaves, pebbles, flowers, etc. and discuss the same with children. This activity helps to build observational skills and increase understanding of patterns in children. After a few days, the children excitedly challenged their peers and anganwadi workers to identify the patterns they made. These activities expose children to the freedom and joy of exploration in education.

The BELIEF team believes that sessions on numeracy should be looked at in conjunction with literacy. For instance, children are encouraged to frame full sentences to express their mathematical understanding. If books are greater in number, then they would be nudged to understand and use the statement, “Books are more than pencils.” If there are three balls in varied sizes, then to introduce the concept of comparing sizes of objects and expressing their findings properly, children can be asked “Which ball is bigger?” or “Which ball is the biggest?”

During the pandemic, the BELIEF team started reimagining the roles of parents in foundational numeracy. Over WhatsApp, the team shares activities with them through text and audio messages and the parents facilitate these activities for their children. These were activities that the children could do at any time of the day. These activities were created based on Aakar, the Maharashtra state curriculum for children between the ages of three to six years. The parents were required to engage with children for about thirty to forty minutes every day.

The team understands that the struggle to strengthen ECE is going to be long drawn out, as every stakeholder is used to the older system. They believe that if the practitioners and researchers work together, then meaningful interventions in ECE can be rolled out.



Swatantra Talim

### Swatantra Talim

Since 2013, Swatantra Talim, a non-profit, has been working to build a culture of creativity and questioning skills among rural children aged six to sixteen years. It runs two after-school learning centers in Lucknow and Sitapur districts and works with five government schools in Lucknow district. To facilitate social change, the organization envisions co-creating every village as a center of innovation and building every child into an innovator.

The children in the region come from families with low literacy levels, culturally rooted orthodox value systems, and deep social inequalities. The lack of contextual education that fails to incorporate their experiences and traditional knowledge pushes these children further away from the public education system.

Rahul Aggarwal, co-founder of Swatantra Talim shares, “Our activities’ focus is on making learning mathematics explorative and collaborative. We try picking problems that can be attempted differently. The idea that there is only one method of attempting a problem needs to be debunked.”

The team uses *Khoj Dabbas* for their sessions. These could be described as a Lab-in-a-Box that equips each school with lesson plans, easy-to-follow activities, and locally sourced low-cost materials. These *Dabbas* enable educators to explain science, mathematics, language, and social science in an integrated manner.

For example, if the operations of multiplication and division are being explained in the session, then the teacher could conduct operations using contextual materials such as wooden sticks and eventually move to notebooks. This activity helps children understand abstract concepts by using concrete objects.

*Khoj-Yaan* is an extension of *Khoj Dabbas*. This experiential learning program focuses on expression, exploring thoughts, scenarios, and feelings in a 'fun and learn' way. It integrates teaching language, mathematics and science through puppetry, creation, puzzles, and games. Children in grades one and two are encouraged to make and play with toys.

For instance, the team using the story of the hungry caterpillar asked children to make their own caterpillars and weave a story. The children in grade three could modify the game of snakes and ladders to caterpillars and ladders where the facilitator could introduce new set of rules that help the children apply basic mathematical operations and become problem-solvers.

The children in grades four and five could be given puzzles such as sudoku that help them hone their logical reasoning and engage with numbers. Rahul adds, "The sudoku puzzle of a five into five grid can be conducted using five different objects and each object is five in number. These objects can be locally available materials such as sticks, pebbles, etc. Children enjoy doing these puzzles. Using such engaging techniques and materials, their fear of math starts to disappear."

To introduce the qualities of numbers, a game could be played in which a player can be asked to select a number and the other player must guess it. For instance, if a player selects any number between one to hundred,

such as fifty, then the facilitator can nudge the other players to ask whether that number is odd or even or a multiple of any number.

## The fear of math is accentuated by notions like it is alright to not be good at the subject or it is not useful in life.

The pedagogy of simulation and trying out different methods to solve puzzles and problems encourages children to keep track of, and reflect on, their performances. The Swatantra Talim team believes that developing robust foundational conceptual understanding and an environment of thinking and brainstorming, encouraging exposure to innovative ideas and thoughts, and real-life applications will give children a well-rounded understanding of mathematics.

### In Conclusion

Most of the stakeholders in our education system including educators, policy makers, and parents have been taught mathematics using mechanical processes that have had limited real-life applications. Fear has traditionally been evoked to make them learn, and the essence of concepts was not expressed. An education landscape that adopts engaging, explorative, and contextual attitudes, curriculum, pedagogy, and teaching-learning materials can help children truly find the joy of learning mathematics.

### You may reach out to the organizations

**featured in the story at:** [Aavishkaar - Palampur - info@aavishkaar-palampur.org](mailto:info@aavishkaar-palampur.org), [Palakneeti Parivar - sumitramarathe@gmail.com](mailto:sumitramarathe@gmail.com), [Better Education Lifestyle and Environment Foundation \(BELIEF\) - connect.belief@gmail.com](mailto:connect.belief@gmail.com) and [Swatantra Talim - swatantratalim@gmail.com](mailto:swatantratalim@gmail.com).



Wipro Foundation is a public charitable trust set up for corporate citizenship and Corporate Social Responsibility (CSR) initiatives of Wipro.

Send your comments or feedback on [admin.wiprofoundation@wipro.com](mailto:admin.wiprofoundation@wipro.com)  
To read previous issues of Samuhik Pahal please visit: <https://issuu.com/wiprofoundation>



For more information, visit: <http://wiprofoundation.org/>

Cover Photo Credit:  
Aavishkaar Palampur

Designed by: Bindu Creative

*Disclaimer: The information in the document is made available based on internal data and other sources believed to be true and are for general guidance only but which may have not been verified independently. While every effort is made to ensure the accuracy and completeness of information contained, Wipro Foundation takes no responsibility and assumes no liability for any error/ omission or accuracy of the information or claims for damages, including exemplary damages, arising out of use, inability to use, or with regard to the accuracy or sufficiency of the information contained. Views expressed by authors are their own and do not represent Wipro Foundation's views. Recipients of this material should rely on their own judgments and conclusions from relevant sources before making any decisions.*